

۱. (۲ امتیاز)

الف) ۶ عدد طبیعی $a < b < c < d < e < f$ را چنان پیدا کنید که:

$$\begin{matrix} \text{م.م.ب} & & \text{م.م.ب} & & \text{م.م.ب} & & \text{م.م.ب} & & \text{م.م.ب} \\ (e, f) & > & (d, e) & > & (c, d) & > & (b, c) & > & (a, b) \end{matrix}$$

ب) کوچکترین مقدار ممکن برای f را بیابید.

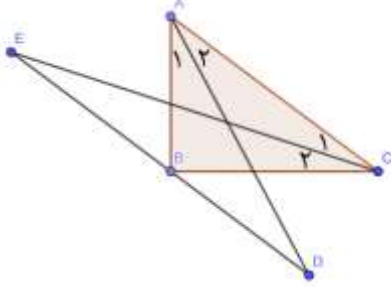
پاسخ.

الف و ب)

$$\begin{matrix} \text{م.م.ب} & & \text{م.م.ب} & & \text{م.م.ب} & & \text{م.م.ب} & & \text{م.م.ب} \\ (e, f) & > & (d, e) & > & (c, d) & > & (b, c) & > & (a, b) \\ ۱ & & ۲ & & ۳ & & ۵ & & ۷ \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} a &= ۷ &= ۱ \times ۷ \\ b &= ۳۵ &= ۵ \times ۷ \\ c &= ۴۵ &= ۵ \times ۳ \times ۳ \\ d &= ۴۸ &= ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \\ e &= ۵۰ &= ۱ \times ۲ \times ۵ \times ۵ \\ f &= ۵۱ &= ۱ \times ۵۱ \end{aligned}$$

۲. (۱ امتیاز) در مثلث ABC می‌دانیم $AB = ۳$ ، $BC = ۴$ و $AC = ۵$. از راس B خطی به موازات AC می‌کشیم تا نیمساز زاویه داخلی A را در D و نیمساز زاویه داخلی C را در E قطع کند. طول DE را بیابید.



حل.

$$\begin{aligned} \widehat{A_1} &= \widehat{A_2} \rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{D} \rightarrow BD = AB = ۳ \\ \widehat{C_1} &= \widehat{C_2} \rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{E} \rightarrow BE = BC = ۴ \\ \rightarrow DE &= DB + BE = ۳ + ۴ = ۷ \end{aligned}$$

۴. (۲ امتیاز)

الف) ثابت کنید عبارت جبری $n^۴ + ۶۴$ به ازای تمامی مقادیر طبیعی n ، عددی مرکب است و هیچگاه اول نمی‌شود.
ب) ثابت کنید عبارت جبری $n^۴ - ۲n^۳ + ۳n^۲ - ۲n + ۱$ به ازای تمامی مقادیر طبیعی n عددی مربع کامل می‌شود.

پاسخ.

الف)

$$\begin{aligned} n^۴ + ۱۶n^۲ + ۶۴ - ۱۶n^۲ &= (n^۲ + ۸) - (۴n)^۲ \\ &= (n^۲ + ۴n + ۸)(n^۲ - ۴n + ۸) \end{aligned}$$

ب)

$$n^۴ - ۲n^۳ + ۳n^۲ - ۲n + ۱ = (n^۲ - n + ۱)^۲$$

۳. (۲ امتیاز) n ضلعی منتظم $ABCDE \dots$ مفروض است.

اگر هر زاویه داخلی آن، ۱۵۰ درجه باشد:

الف) این n ضلعی چند قطر دارد؟

ب) زاویه بین قطرهای AC و AD را با استدلال پیدا کنید.

پاسخ.

الف)

روش اول. تعداد زوایای n ضلعی $= (n - ۲) \times ۱۸۰$

$$\frac{(n-۲) \times ۱۸۰}{n} = ۱۵۰ \rightarrow n = ۱۲$$

زاویه هر ضلع:

روش دوم.

مجموع زوایای خارجی برابر با ۳۶۰° است. در این شکل، هر زاویه خارجی، ۳۰° است، بنابراین، ۱۲ ضلع دارد.

بنابراین، تعداد قطرهای شکل برابر است با:

$$D = \frac{۱}{۲}n(n - ۳) = \frac{۱}{۲} \times ۱۲ \times ۹ = ۵۴$$

ب)

$\widehat{A_1}$ زاویه محاطی کمان CD است. این کمان، ۳۰° است،

بنابراین $\widehat{A_1}$ ، ۱۵° است.

