

۱. (۱ امتیاز)

معادله $x^3 = 8x + 3$ سه ریشه حقیقی دارد.
اگر یکی از آنها $x = 3$ باشد، دو ریشه دیگر آن را بیابید.

حل.

$$\begin{aligned}(x^3 - 8x - 3) \div (x - 3) &= x^2 + 3x + 1 \\ x^2 + 3x + 1 &= 0 \rightarrow x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ \rightarrow x_1 &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

۲. (۲ امتیاز)

سهمی $y = x^2 - 2x - 3$ محورهای مختصات را در نقاط A, B, C قطع می‌کند. مساحت مثلث ABC را بیابید.

حل.

محل تلاقی سهمی با محور x :

$$y = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow (x + 1)(x - 3) = 0$$

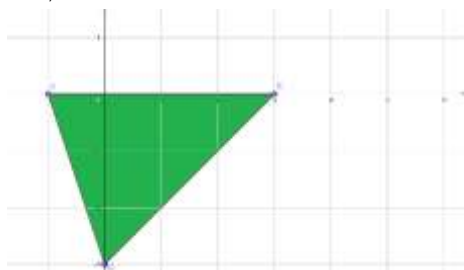
$$\rightarrow x = -1, x = 3$$

$$(-1, 0), (3, 0)$$

محل تلاقی سهمی با محور y :

$$x = 0 \rightarrow y = -3$$

$$(0, -3)$$



$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$$

۳. (۲ امتیاز)

مجموعه جواب دستگاه نامعادلات روبرو را بیابید.

$$\begin{cases} x^3 + x^2 < 4x + 4 \\ |x - 3| < 2 \end{cases}$$

حل.

$$\begin{aligned}x^3 + x^2 - 4x - 4 < 0 &\rightarrow x^2(x + 1) - 4(x + 1) < 0 \\ A &= (x + 1)(x^2 - 4) < 0 \\ B &= |x - 3| < 2 \rightarrow -2 < x - 3 < 2 \rightarrow 1 < x < 5\end{aligned}$$

	$-\infty$	-2	-1	$+1$	$+2$	$+5$	$+\infty$
A	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	
B				$\checkmark$	$\checkmark$		

اشتراک دو بازه: $(1, 2)$

۴. (۲ امتیاز)

در تابع $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} \\ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$ دامنه و برد را مشخص کنید.

حل.

$$\begin{aligned}x^2 - 5x + 6 \neq 0 &\rightarrow x \neq 2, 3 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2, 3\} \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} &= a = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 3)(x - 2)} \\ \rightarrow x - 1 &= ax - 3a \rightarrow (a - 1)x = 3a - 1 \\ &\quad a \neq 1 \\ \rightarrow x &= \frac{3a - 1}{a - 1} \rightarrow \begin{cases} \frac{3a - 1}{a - 1} \neq 2 \rightarrow a \neq -1 \\ \frac{3a - 1}{a - 1} \neq 3 \rightarrow \text{ناممکن} \end{cases} \\ \rightarrow R_f &= \mathbb{R} - \{-1, 1\}\end{aligned}$$