

۱. (۲ امتیاز)

یک روبات در دستگاه مختصات دنبال یک گنج می‌گردد و می‌داند که گنج، در نقطه‌ای با مختصات طبیعی قرار دارد. او از مبدا شروع می‌کند و طبق روشی که در شکل می‌بینید، نقطه‌ها با مختصات طبیعی را می‌گردد. برای مثال، روبات در سومین مکان خود، نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و در هشتمین مکان خود، نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ را می‌گردد.

چنانچه روبات در دویستمین مکان خود، گنج را پیدا کند، گنج در چه نقطه‌ای قرار داشته است؟

حل.

روبات بعد از n^2 حرکت ($n \in \mathbb{N}$) روی محور مختصات است و اگر n^2 فرد باشد، روی محور x ها در نقطه $\begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و اگر زوج باشد، روی محور y ها در نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ n-1 \end{bmatrix}$ قرار دارد. حرکت بعدی‌اش نیز روی محور است و در حرکت بعدی، 90° درجه می‌چرخد. پس برای حرکت دویستم داریم:

$$\sqrt{200} \approx 14 \rightarrow 14^2 = 196$$

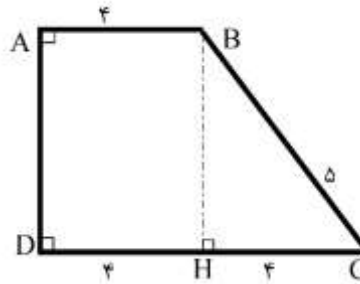
پس در حرکت ۱۹۶، روی محور y ها و در نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 13 \end{bmatrix}$ قرار دارد.

$$196 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 13 \end{bmatrix}, 197 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 13 \end{bmatrix}, 198 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \end{bmatrix}, 199 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 14 \end{bmatrix}, 200 \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \end{bmatrix}$$

۳. (۲ امتیاز)

در دوزنقه قائم‌الزاویه $ABCD$ ، می‌دانیم که $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ ، $AB = 4$ و $BC = 5$ ، $CD = 8$ مساحت دوزنقه را بیابید.

حل.



$$DH = 4 \rightarrow HC = 4$$

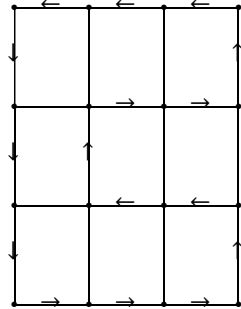
$$\Delta BHC: BH^2 + CH^2 = BC^2 \rightarrow BH = 3$$

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \times BH = 6 \times 3 = 18$$

۲. (۱ امتیاز)

شکل مقابل، نقشه یک کشور است که ۱۶ شهر به صورت یک شبکه 4×4 دارد. یک فروشنده می‌خواهد از یکی از شهرها شروع کند و به تمامی شهرها دقیقاً یک بار برود و در آخر به شهر اول برگردد. نحوه انجام این کار به صورت بردارهایی مشخص شده است.

اگر این کشور ۲۵ شهر به صورت شبکه 5×5 داشت، این کار چطور انجام می‌شد؟



حل.

در یک شبکه 5×5 ، این کار قابل انجام نمی‌باشد، چون جمع ۲۵ بردار یکه افقی و عمودی باید صفر شود که این امر ممکن نیست.

۴. (۲ امتیاز)

دو مربع داریم که اضلاعشان با هم فرق دارد (مثلاً یکی ۳ و دیگری ۴). با چند برش، آنها را به چنان قطعاتی تقسیم کنیم که به کمک کل آن قطعات، بتوانیم یک مربع بزرگتر بسازیم.

حل.

اگر بشود مربعی ساخت، مساحت آن باید $5^2 = 4^2 + 3^2$ باشد، پس ضلع آن باید ۵ باشد.

با این روش می‌توان به نوعی، قضیه فیثاغورت را نیز، ثابت کرد.

