

باشگاه ریاضی مجتمع فرهنگی - آموزشی علامه طباطبائی

لیگ حل مساله ریاضی - مسابقات رادیکال

سوالات درسی پایه هفتم - بهمن ماه ۱۴۰۳

۱. (۲ امتیاز)

اعداد طبیعی‌ای را که تنها ۳ شمارنده طبیعی دارند، اعداد سوم و اعداد طبیعی‌ای را که تنها ۴ شمارنده طبیعی دارند، اعداد چهارم می‌نامیم.

الف) چندتا از اعداد طبیعی سه رقمی، عدد سوم هستند؟

ب) چندتا از اعداد طبیعی دو رقمی، عدد چهارم هستند؟

حل.

الف) اعداد سوم باید به صورت p^2 باشند که تعدادشان ۷ تا می‌شود:

$$11^2 - 13^2 - 17^2 - 19^2 - 23^2 - 29^2 - 31^2$$

ب) اعداد چهارم باید به صورت p^3 یا $p^1 \times q^1$ باشند که تعدادشان ۳۰ تا می‌شود:

$$2 \times 5 - 2 \times 7 - 2 \times 11 - 2 \times 13 - 2 \times 17 - 2 \times 19$$

$$2 \times 23 - 2 \times 29 - 2 \times 31 - 2 \times 37 - 2 \times 41 - 2 \times 43$$

$$2 \times 47$$

$$3^3 - 3 \times 5 - 3 \times 7 - 3 \times 11 - 3 \times 13 - 3 \times 17$$

$$3 \times 19 - 3 \times 23 - 3 \times 29 - 3 \times 31$$

$$5 \times 7 - 5 \times 11 - 5 \times 13 - 5 \times 17 - 5 \times 19$$

$$7 \times 11 - 7 \times 13$$

۲. (۲ امتیاز)

اگر کوچکترین مضرب مشترک دو عدد X و ۶۰ عدد ۸۴۰ باشد، X چه عددی می‌تواند باشد؟

حل.

$$[2^2 \times 3^1 \times 5^1, X] = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$$

X باید 2^3 و 7^1 را داشته باشد و 3^1 و 5^1 را ممکن است داشته باشد یا نداشته باشد. پس مساله چهار جواب طبیعی مختلف دارد:

$$X_1 = 2^3 \times 7^1 = 56$$

$$X_2 = 2^3 \times 7^1 \times 3^1 = 168$$

$$X_3 = 2^3 \times 7^1 \times 5^1 = 280$$

$$X_4 = 2^3 \times 7^1 \times 3^1 \times 5^1 = 840$$

۳. (۱ امتیاز)

علی می‌خواهد جعبه‌ای حاوی ۱۰۸ مکعب واحد درست کند و سطح جعبه را با کاغذ کادویی بسته‌بندی کند. کمترین مساحت کاغذ کادویی مورد نیاز چقدر است؟

حل.

ابعاد	کاغذ کادو	ابعاد	کاغذ کادو
$1 \times 1 \times 108$	۴۳۴	$2 \times 2 \times 27$	۲۲۴
$1 \times 2 \times 54$	۳۲۸	$2 \times 3 \times 18$	۱۹۲
$1 \times 3 \times 36$	۲۹۴	$2 \times 6 \times 9$	۱۶۸
$1 \times 4 \times 27$	۲۷۸	$3 \times 3 \times 12$	۱۶۲
$1 \times 6 \times 18$	۲۶۶	$3 \times 4 \times 9$	۱۵۰
$1 \times 9 \times 12$	۲۵۸	$3 \times 6 \times 6$	۱۴۴

بنابراین، کمترین مساحت کاغذ کادویی مورد نیاز، ۱۴۴ واحد می‌باشد.

۴. (۲ امتیاز)

چندوجهی‌های منتظم محدب، به اجسام افلاطونی معروفند. می‌توان نشان داد که در فضای سه بعدی، تنها ۵ جسم افلاطونی داریم.

۱- چهاروجهی منتظم که از ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است.

۲- شش وجهی منتظم (مکعب) که از ۶ مربع تشکیل شده

۳- هشت وجهی منتظم که از ۸ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده

۴- دوازده وجهی منتظم که از ۱۲ پنج‌ضلعی منتظم تشکیل شده

۵- بیست وجهی منتظم که از ۲۰ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده

با روش ریاضی حساب کنید که هر یک از حجم‌های ۴ و ۵، چند

راس و چند یال دارند؟

حل.

۵	۴	۳	۲	۱	
۱۲	۲۰	۶	۸	۴	تعداد راس (n)
۳۰	۳۰	۱۲	۱۲	۶	تعداد یال (e)
۲۰	۱۲	۶	۸	۴	تعداد وجه (f)

$$n + f = e + 2 \text{ همواره داریم}$$