به نام مناسب‌ترین واژه‌ها — به رسم محبت به نام خدا

دبیرستان های دوره دوم مجتمع علّامه طباطبایی		آموزش و پرورش شهر تهران
پاسخنامه درس : هندسه ۱	امتحانات نوبت اول	پاسخنامه
تاریخ امتحان : چهارشنبه ۱۲ دی ماه ۱۴۰۳	زمان آزمون: ۱۱۰ دقیقه	پایه: دهم ریاضی
سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۳		تعدادصفحات: ۴صفحه

زیبایی ریاضیات به هندسه و زیبایی هندسه به یک نقطه و زیبایی نقطه به هیچ. (انیشتین)

بخش اول – درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (هر مورد ۰/۲۵ نمره)

۱- به مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی نادرست است، مثال نقض می‌گوییم. درست

۲- اگر $\frac{y}{۴}=\frac{x}{۳}$ باشد آن‌گاه تساوی $\frac{y}{y-۴}=\frac{x}{۳-x}$ همواره درست است. نادرست

۳- اگر نقطه‌ای به فاصله یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد آن نقطه روی نیم‌ساز آن زاویه قرار دارد. درست

۴- اگر نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه ۸ باشد آن‌گاه نسبت ارتفاع‌های نظیر آن‌ها برابر ۴ است. نادرست

۱ نمره

بخش دوم – هر یک از جاهای خالی را با یک عدد یا عبارت مناسب پر کنید. (هر مورد ۰/۲۵ نمره)

۵- هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

۶- واسطه هندسی پاره‌خط‌هایی به طول ۲ و ۸ پاره‌خطی به طول ۴ می‌باشد.

۷- اگر $\frac{۱۰}{۷}=\frac{y}{۴}=\frac{x}{۳}$ آن‌گاه حاصل $x+y$ برابر ۱۰ است.

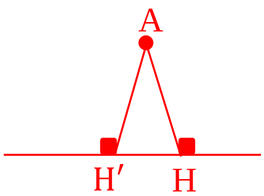
۸- در استدلال استنتاجی از اطلاعاتی استفاده می‌کنیم که درستی آن‌ها را قبلاً پذیرفته‌ایم.

۱ نمره

بخش سوم – درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید. (در صورت نادرستی مثال نقض بیاورید و در صورت درستی اثبات کنید.)

۹- از یک نقطه غیرواقع بر خط نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد. درست است. به کمک برهان خلف ثابت می‌کنیم:

فرض خلف: از یک نقطه غیر واقع بر خط می‌توان بیش از یک عمود بر خط رسم کرد. بنابراین:



$$\hat{A}+\hat{H}+\widehat{H'}=\hat{A}+۹۰^\circ+۹۰^\circ=\hat{A}+۱۸۰^\circ>۱۸۰^\circ \text{※}$$

می‌دانیم مجموع زوایای یک مثلث همواره برابر ۱۸۰° است و با این قضیه در تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم درست است.

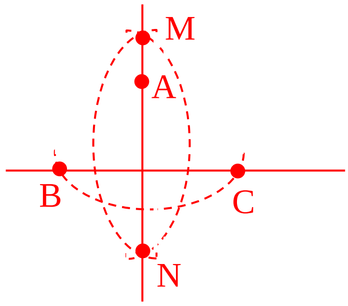
۱۰- هر چهارضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است. نادرست است.

لوزی چهار ضلع برابر دارد اما مربع نیست.

۱/۵ نمره

۱ نمره

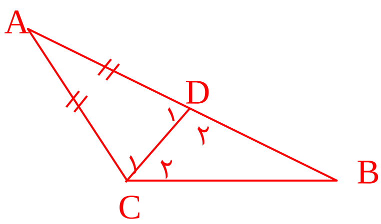
۱۱- روش رسم خط عمود بر یک خط از یک نقطه غیرواقع بر آن را به همراه رسم شکل توضیح دهید.



ابتدا دهانه پرگار را به اندازه دلخواه و بیش‌تر از فاصله نقطه A از خط d باز می‌کنیم و از نقطه A یک کمان می‌زنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند. سپس عمودمنصف پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم. دهانه پرگار را بیشتر از نصف فاصله BC باز کرده یک‌بار از نقطه B و بار دیگر از نقطه C کمان می‌زنیم تا این دو کمان همدیگر را در نقاط N و M قطع کنند. این دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم که از نقطه A نیز می‌گذرد.

۱/۵ نمره

۱۲- اثبات کنید : « اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر بزرگ‌تر است از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.»



فرض : $AB > AC$

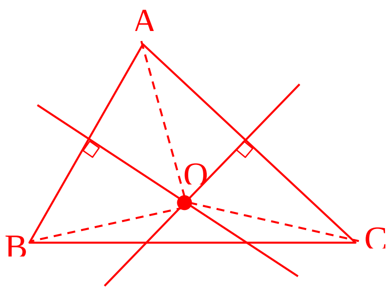
حکم : $\hat{C} > \hat{B}$

ابتدا به اندازه ضلع AC روی ضلع AB جدا می‌کنیم و آن را AD می‌نامیم. بنابراین مثلث ACD یک مثلث متساوی‌الساقین است و $\widehat{C_1} = \widehat{D_1}$

$$\hat{C} > \hat{C}_1 = \widehat{D}_1 \xrightarrow{\text{زاویه خارجی}} \widehat{D}_1 = \hat{C}_2 + \hat{B} \to \widehat{D}_1 > \hat{B} \to \hat{C} > \hat{B}$$

۱/۵ نمره

۱۳- ثابت کنید سه عمودمنصف هر مثلث همرسند.



در مثلث دلخواه ABC از عمودمنصف‌های دو ضلع AB و AC را رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه O قطع کنند. می‌دانیم:

$$\left.\begin{matrix} OA = OC \\ OA = OB \end{matrix}\right\} \Rightarrow OB = OC$$

پس نقطه O روی عمودمنصف ضلع BC قرار دارد.

بنابراین نقطه O محل برخورد سه عمودمنصف مثلث است.

۱ نمره

۱۴- الف) عکس قضیه زیر را بنویسید. (۰/۵ نمره)

در هر مثلث اگر سه ضلع با هم برابر باشند آن‌گاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

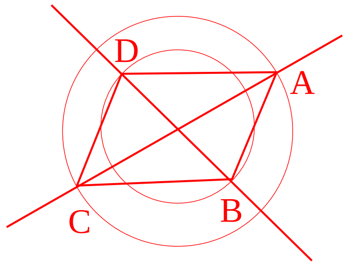
در هر مثلث اگر سه زاویه با هم برابر باشند آن‌گاه سه ضلع نیز با هم برابر می‌باشند.

ب) قضیه زیر را به‌صورت دوشرطی بنویسید. (۰/۵ نمره)

اگر در یک چهارضلعی قطرها منصف یکدیگر باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

در یک چهارضلعی قطرها منصف یکدیگر هستند، اگروفقط‌اگر چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد.

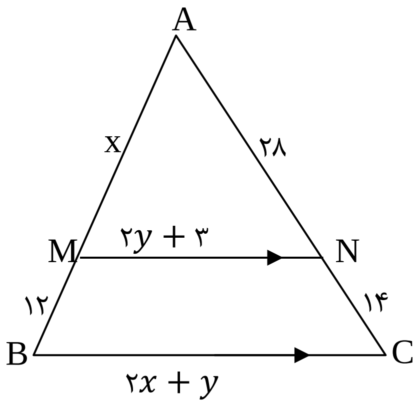
۱۵- متوازی‌الاضلاع به قطرهای ۴ و ۶ سانتی‌متر رسم کرده و نحوه ترسیم را توضیح دهید.



دو خط متقاطع رسم کرده و محل برخوردشان را نقطه O نام‌گذاری می‌کنیم. از نقطه O به شعاع‌های ۲ و ۳ واحد دایره‌هایی رسم می‌کنیم تا این دو خط را در نقاط A و B و C و D قطع کنند (مانند شکل) سپس نقاط را به هم وصل می‌کنیم تا چهارضلعی متوازی‌الاضلاع $ABCD$ به‌دست آید.

۱ نمره

۱۶- در هر یک از شکل‌های زیر مقادیر مجهول را به‌دست آورید.

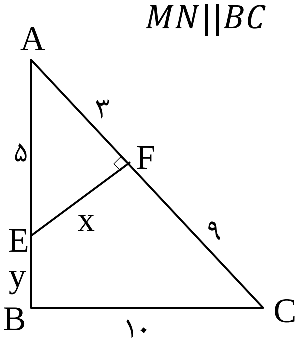


$MN\|BC$

الف) $MN\|BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{x}{۱۲}=\frac{۲۸}{۱۴} \Rightarrow x=۲۴$

$MN\|BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{۲y+۳}{۴۸+y}=\frac{۲۴}{۳۶} \Rightarrow \frac{۲y+۳}{۴۸+y}=\frac{۲}{۳}$

$\Rightarrow ۹۶+۲y=۶y+۹ \Rightarrow ۴y=۸۷ \Rightarrow y=\frac{۸۷}{۴}$



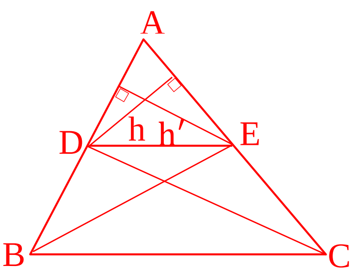
ب) $\left.\begin{array}{l}\hat{A}\ \text{مشترک}\\ \hat{E}=\hat{B}=۹۰^\circ\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{دو زاویه}} \overset{\triangle}{ABC}\sim\overset{\triangle}{AEF} \xrightarrow{\text{نسبت تشابه}} \frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AB}$

$\Rightarrow \frac{x}{۱۰}=\frac{۵}{۱۲}=\frac{۳}{۵+y} \Rightarrow ۱۲x=۵۰ \Rightarrow x=\frac{۵۰}{۱۲}=\frac{۲۵}{۶}$

$\Rightarrow ۲۵+۵y=۳۶ \Rightarrow ۵y=۱۱ \Rightarrow y=\frac{۱۱}{۵}$

۲ نمره

۱۷- قضیه تالس را بنویسید سپس آن را اثبات کنید.



هرگاه در یک مثلث خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند روی آن دوضلع، چهار پاره خط جدا می‌کند که اندازه‌های آن‌ها تشکیل یک تناسب را می‌دهند.

$$DE\|BC \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

اثبات: از E به B و از D به C وصل می‌کنیم:

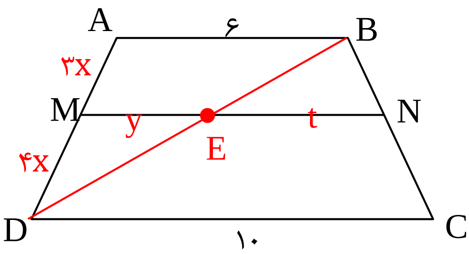
$$\frac{S_{ADE}}{S_{DBE}}=\frac{\frac{۱}{۲}h'\times AD}{\frac{۱}{۲}h'\times DB}=\frac{AD}{DB} \quad , \quad \frac{S_{DAE}}{S_{DEC}}=\frac{\frac{۱}{۲}h\times AE}{\frac{۱}{۲}h\times EC}=\frac{AE}{EC}$$

مثلث‌های DBE و DEC هم مساحت هستند . پس:

$$\Rightarrow \frac{S_{DAE}}{S_{DEC}}=\frac{S_{ADE}}{S_{DBE}} \Rightarrow \frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$$

۱/۵ نمره

۱۸- در شکل مقابل پاره‌خط MN موازی قاعده‌های ذوزنقه $ABCD$ می‌باشد اگر $\frac{AM}{MD}=\frac{۳}{۴}$ باشد آن‌گاه طول MN را به‌دست آورید.



طبق قضیه تالس در ذوزنقه داریم: $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{CN}=\frac{۳}{۴}$

قطر BD را رسم می‌کنیم تاپاره‌خط MN را در E قطع کند.

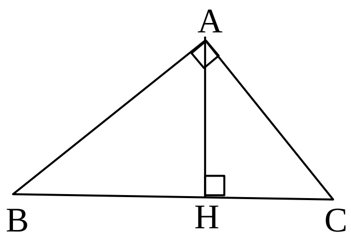
$$ABD \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{ME}{AB}=\frac{DM}{AD} \Longrightarrow \frac{y}{۶}=\frac{۴}{۷} \Longrightarrow y=\frac{۲۴}{۷}$$

$$BDC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EN}{DC}=\frac{BN}{BC} \Longrightarrow \frac{t}{۱۰}=\frac{۳}{۷} \Longrightarrow t=\frac{۳۰}{۷}$$

$$\Longrightarrow y+t=\frac{۲۴}{۷}+\frac{۳۰}{۷}=\frac{۵۴}{۷}$$

۱/۵ نمره

۱۹- ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر آن را به دو مثلث قائم‌الزاویه تقسیم می‌کند که مثلث ACH با مثلث ABC متشابه است و داریم: $AC^۲=CH\times BC$



$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{H}=۹۰^\circ \\ \hat{C}\quad \text{مشترک}\end{cases} \xrightarrow{\text{دو زاویه}} \overset{\triangle}{AHC}\sim\overset{\triangle}{ABC} \Longrightarrow$$

$$\frac{AH}{AB}=\frac{CH}{AC}=\frac{AC}{BC} \Longrightarrow AC^۲=CH.BC$$

۱/۵ نمره

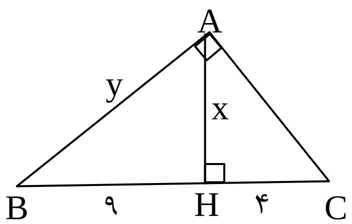
۲۰- مثلث ABC و MNP متشابه هستند اگر طول اضلاع مثلث ABC برابر ۵ و ۸ و ۱۱ باشند و محیط مثلث MNP برابر ۶۰ باشد طول ضلع‌های مثلث MNP را به‌دست آورید.

دو مثلث ABC و MNP با هم متشابه هستند بنابراین نسبت محیط‌های آن‌ها با نسبت تشابه برابر است. اگر طول اضلاع مثلث MNP را x و y و z در نظر بگیریم:

$$\frac{\text{محیط } ABC}{\text{محیط } MNP}=\frac{۱۱+۸+۵}{۶۰}=\frac{۵}{x}=\frac{۸}{y}=\frac{۱۱}{z} \Longrightarrow \begin{cases}\frac{۵}{x}=\frac{۲}{۵} \Longrightarrow x=\frac{۲۵}{۲} \\ \frac{۸}{y}=\frac{۲}{۵} \Longrightarrow y=\frac{۴۰}{۲}=۲۰ \\ \frac{۱۱}{z}=\frac{۲}{۵} \Longrightarrow z=\frac{۵۵}{۲}\end{cases}$$

۱/۵ نمره

۲۱- در مثلث قائم‌الزاویه زیر $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ ارتفاع AH وارد بر وتر را رسم کرده‌ایم به کمک روابط طولی مقادیر مجهول x و y را به‌دست آورید.



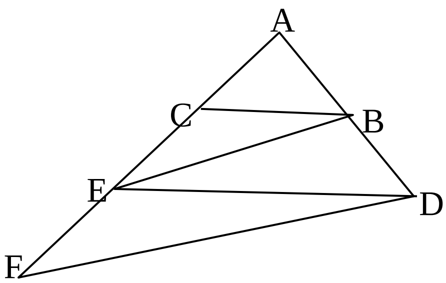
$$AH^۲=BH.HC \Longrightarrow AH^۲=۹\times۴=۳۶ \Longrightarrow AH=۶ \rightarrow x=۶$$

$$AB^۲=BH^۲+AH^۲ \Longrightarrow AB^۲=۸۱+۳۶=۱۱۷ \Longrightarrow AB=\sqrt{۱۱۷}$$

$$\rightarrow y=\sqrt{۱۱۷}$$

۱ نمره

۲۲- در شکل مقابل می‌دانیم که $BC\|DE$ و $BE\|DF$ است به کمک قضیه تالس ثابت کنید $AE^۲=AC\times AF$



$$BE\|DF \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AD} \quad (۱)$$

$$BC\|DE \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD} \quad (۲)$$

$$\xRightarrow{(۱),(۲)} \frac{AC}{AE}=\frac{AE}{AF} \Longrightarrow AE^۲=AC.AF$$

۱/۵ نمره