

۲. (۲ امتیاز) چهار عدد، دنباله‌ای حسابی تشکیل داده‌اند. اگر به آنها ۵، ۶، ۹ و ۱۵ واحد اضافه کنیم، یک دنباله هندسی می‌شوند. این اعداد را تعیین کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} (A + 5)(A + 2x + 9) = (A + x + 6)^2 \\ (A + x + 6)(A + 3x + 15) = (A + 2x + 9)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x = 2A + 9 \\ x^2 + 3x = 3A + 9 \end{cases} \rightarrow x = A \rightarrow x = \pm 3$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3, 6, 9, 12 \\ 8, 12, 18, 27 \end{cases}$$

۱. (۱ امتیاز) اگر A_n ها بازه‌های اعداد حقیقی باشند و بدانیم $A_n = [n, 2n]$ باشد،

$(A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup (A_3 - A_4)$ چه بازه‌ای

می‌شود؟

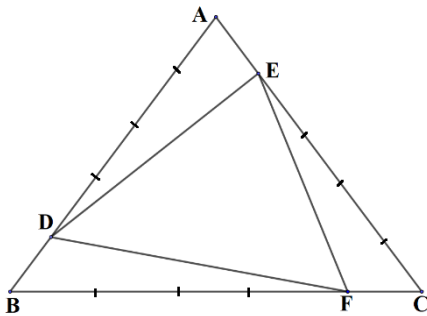
پاسخ:

$$A_1 = [1, 2], A_2 = [2, 4], A_3 = [3, 6], A_4 = [4, 8]$$

$$A_1 - A_2 = [1, 2), A_2 - A_3 = [2, 3), A_3 - A_4 = [3, 4)$$

$$\rightarrow (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup (A_3 - A_4) = [1, 4)$$

۴. (۲ امتیاز) هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع ABC به ۵ قسمت برابر تقسیم شده است. مساحت مثلث DEF چه کسری از مساحت مثلث ABC است.



$$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} AD \times AE \times \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times AB \times AC \times \sin A$$

$$= \frac{1}{25} \times \left(\frac{1}{5} AB \times AC \times \sin A \right) = \frac{1}{25} S_{\triangle ABC}$$

$$S_{\triangle BFD} = S_{\triangle CEF} = S_{\triangle ADE} = \frac{1}{25} S_{\triangle ABC}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle DEF} = S_{\triangle ABC} - \frac{12}{25} S_{\triangle ABC} = \frac{13}{25} S_{\triangle ABC}$$

۳. (۲ امتیاز) در مثلث ABC اگر $BC = 16$ و $h_a = m_a = 5$ باشد،

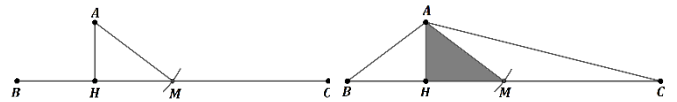
الف) چگونه می‌توانیم مثلث ABC را رسم کنیم؟

ب) طول کوچکترین ضلع مثلث چقدر خواهد بود؟

پاسخ:

الف) ابتدا مثلث AHM را در حالت وتر و یک ضلع رسم می‌کنیم.

زاویه قائمه H را می‌کشیم. به مرکز H و شعاع $AH = 3$ دایره می‌زنیم تا A به دست آید.



پاسخ:

به مرکز A و شعاع $AM = 5$ کمان می‌زنیم تا ضلع دیگر قائم را در M قطع کند. به مرکز M و شعاع $BM = 8$ کمان می‌زنیم تا نقاط B و C به دست آیند.

ب)

$$\begin{cases} HM = 4 \\ BM = CM = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} BH = 4 \\ CH = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} AB = 5 \\ AC = \sqrt{153} \cong 12 \\ BC = 16 \end{cases}$$

پس کوچکترین ضلع مثلث، $AB = 5$ است.