

۱- معادله‌ی خطی که به موازات نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم بوده و نیمساز ناحیه‌ی دوم را در نقطه‌ای به طول  $x = 2$  قطع می‌کند کدام است؟

۱۳۷۸- سراسری- آسان- #۱۰۹۱۰۷-م- ن

- ۱  $y + x = 4$      
  ۲  $y + x = -4$      
  ۳  $y - x = 4$      
  ۴  $y - x = -4$

۲- مساحت مثلثی که دو ضلع آن واقع بر خطوطی به معادلات  $y + x = 2$  و  $2y - x = 4$  و ضلع دیگر آن بر محور  $x$  قرار دارد کدام است؟

۱۳۷۳- سراسری- متوسط- #۱۰۹۱۰۶-م- ن

- ۱ ۵     
  ۲ ۶     
  ۳ ۷     
  ۴ ۸

۳- پنج عدد طبیعی متوالی مفروضند. مجموع مربعات سه تای اول برابر است با مجموع مربعات دوتای آخر، کوچک‌ترین آن‌ها کدام است؟

۱۳۹۲- متنا- متوسط- #۵۷۹۹۲-م- ن

- ۱ ۲     
  ۲ ۵     
  ۳ ۱۰     
  ۴ ۱۸

۴- معادله‌ی درجه‌ی دومی که هریک از ریشه‌هایش نصف ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 6x + 4 = 0$  باشد کدام است؟

۱۳۹۲- متنا- متوسط- #۵۹۴۵۸-م- ن

- ۱  $x^2 - 3x + 4 = 0$      
  ۲  $x^2 - 6x + 1 = 0$      
  ۳  $x^2 - 6x + 2 = 0$      
  ۴  $x^2 - 3x + 1 = 0$

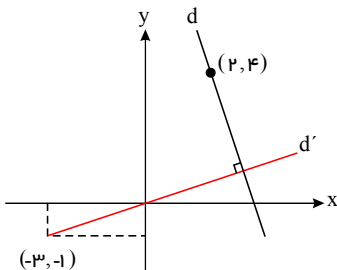
۵- نقاط  $A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ،  $B \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  و  $C \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$  سه رأس متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  هستند. مجموع طول و عرض مختصات رأس  $D$  آن کدام است؟

۱۳۹۸- قلم‌چی- آسان- #۴۰۵۵۲۵-م- ن

- ۱ ۳     
  ۲ ۴     
  ۳ ۵     
  ۴ ۶

۱۳۹۸- قلم‌چی- آسان- #۴۰۸۹۷۲-م- ن

۶- در شکل زیر معادله‌ی خط  $d$  کدام است؟



- ۱  $y = -2x + 10$      
  ۲  $y = -3x + 10$      
  ۳  $y = -3x + 8$      
  ۴  $y = -2x + 8$

۷- دایره‌ای به مرکز  $(2, 1)$ ، بر دو خط به معادلات  $3x + 4y = 5$  و  $12y - 5x = a$  مماس است. دو مقدار ممکن برای  $a$  کدام است؟

۱۳۹۸- قلم‌چی- متوسط- #۴۰۵۵۳۴-م- ن

- ۱  $-15$  و  $11$      
  ۲  $1$  و  $3$      
  ۳  $-11$  و  $15$      
  ۴  $-1$  و  $-3$

۸- دو نقطه‌ی  $A(-4, 7)$  و  $B(1, 5)$  دو سر قطری از دایره هستند. معادله‌ی قطری از دایره که از مبدأ مختصات می‌گذرد کدام است؟

۱۳۹۷- قلم‌چی- متوسط- #۲۵۷۳۸۸-م- ن

- ۱  $y + 4x = 0$      
  ۲  $5y - 2x = 0$      
  ۳  $y - 4x = 0$      
  ۴  $2y - 5x = 0$

۹- اگر حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی  $(m - 1)x^2 + 6x + 4 = m$  برابر ۲ باشد، آن‌گاه مجموع مربعات این ریشه‌ها، کدام است؟

۱۳۹۹- قلم‌چی- متوسط- #۴۹۷۹۲۵-م- ن

- ۱ ۲۴     
  ۲ ۶     
  ۳ ۳۲     
  ۴ ۱۶

۱۳۹۷- قلم‌چی- متوسط- #۳۳۲۹۱۵-م- ن

۱۰- اگر نقاط  $A(3, 4)$  و  $B(-1, 6)$  دو رأس مقابل یک مربع باشند، اندازه‌ی مساحت مربع کدام است؟

- ۱ ۵     
  ۲ ۱۰     
  ۳ ۱۵     
  ۴ ۲۰

۱۱- دایره‌ای که مرکز آن روی خط  $y = x - 1$  قرار دارد، بر دو خط  $y = \frac{-3}{4}x$  و  $3x + 4y = 6$  مماس است. فاصله مرکز دایره تا مبدأ مختصات

کدام است؟

۲ (۴)

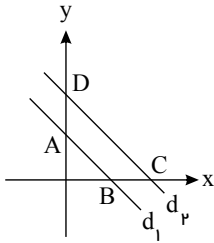
$\sqrt{3}$  (۳)

$\sqrt{2}$  (۲)

۱ (۱)

۱۲- در شکل زیر  $d_1 : x + y = 2$  و  $d_2 : x + y = 4$  است. در ذوزنقه  $ABCD$  مجموع دو قاعده چند برابر ارتفاع آن است؟

۱۳۹۹-۱۱۹۹۱-#م-متوسط-قلم چی



۶ (۱)

۳ (۲)

$6\sqrt{2}$  (۳)

$3\sqrt{2}$  (۴)

۱۳- به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، معادله  $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{2}m + 2 = 0$  درجه‌ی دوم فاقد ریشه‌ی حقیقی است؟

۱۳۸۹-۴۸۷۶۱-#م-متوسط-خارج از کشور

$-1 < m < 5$  (۴)

$-2 < m < 4$  (۳)

$-3 < m < 4$  (۲)

$-3 < m < 5$  (۱)

۱۳۹۰-۶۸۶۹-#م-متوسط-سراسری

۱۴- مجموع ریشه‌های حقیقی معادله  $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$  کدام است؟

-۴ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲)

۴ (۱)

۱۵- معادله‌ی دو ضلع از متوازی‌الاضلاع به صورت  $2x + 3y = 7$  و  $x - 2y = 0$  است. اگر یکی از رئوس متوازی‌الاضلاع باشد، کدام یک

از نقاط زیر، رأس دیگری از این متوازی‌الاضلاع است؟

$(-2, -1)$  (۴)

$(-1, 3)$  (۳)

$(5, -1)$  (۲)

$(4, 2)$  (۱)

## پاسخنامه تشریحی

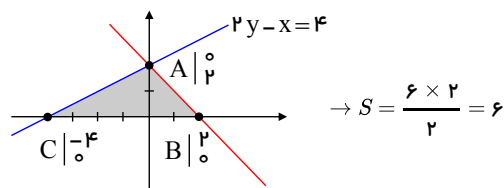
۱ - گزینه ۴ معادله‌ی خط نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم  $y = x$  است که شیب آن یک می‌باشد و چون خط باید با نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم موازی باشد پس شیب خط مطلوب هم، یک می‌باشد. چون این خط، نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم ( $y = -x$ ) را در نقطه‌ای به طول  $x = ۲$  قطع می‌کند پس عرض آن  $y = -۲$  است.

$$A \left|_{-۲}^۲}, m = 1 \rightarrow y - (-۲) = 1(x - ۲) \rightarrow y + ۲ = x - ۲ \rightarrow y - x = -۴$$

۲ - گزینه ۲ ابتدا محل برخورد این خطوط را با محورهای مختصات پیدا می‌کنیم.

$$y + x = ۲ \rightarrow \begin{cases} x = ۰ \rightarrow y = ۲ \\ y = ۰ \rightarrow x = ۲ \end{cases}, \quad ۲y - x = ۴ \rightarrow \begin{cases} x = ۰ \rightarrow y = ۲ \\ y = ۰ \rightarrow x = -۴ \end{cases}$$

سپس با رسم این خطوط، مساحت مثلث را بدست می‌آوریم.



۳ - گزینه ۳ کافی است اعداد  $x, x+1, x+۲, x+۳, x+۴$  را در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} x^۲ + (x+1)^۲ + (x+۲)^۲ &= (x+۳)^۲ + (x+۴)^۲ \\ \Rightarrow x^۲ + x^۲ + ۲x + 1 + x^۲ + ۴x + ۴ &= x^۲ + ۶x + ۹ + x^۲ + ۸x + ۱۶ \\ \Rightarrow x^۲ - ۸x - ۲۰ &= ۰ \Rightarrow (x-1۰)(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = 1۰ & \text{ق ق} \\ x = -۲ & \text{غ ق (طبیعی نمی‌باشد)} \end{cases} \end{aligned}$$

۴ - گزینه ۴ اگر  $y$  ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم جدید و  $x$  ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم قدیم باشد داریم:

$$y = \frac{x}{۲} \Rightarrow x = ۲y \xrightarrow{\text{معادله}} (۲y)^۲ - ۶(۲y) + ۴ = ۰ \Rightarrow ۴y^۲ - ۱۲y + ۴ = ۰ \Rightarrow y^۲ - ۳y + 1 = ۰$$

۵ - گزینه ۱ قطرهای متوازی الاضلاع، یکدیگر را نصف می‌کنند و داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \rightarrow ۳ + (-۳) = -۲ + x_D \rightarrow x_D = ۲ \\ y_A + y_C = y_B + y_D \rightarrow ۴ + (-۲) = 1 + y_D \rightarrow y_D = 1 \end{cases} \rightarrow x_D + y_D = ۲ + 1 = ۳$$

۶ - گزینه ۲

$$A(-۳, -1), O(۰, ۰) \in d \rightarrow m_{d'} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{-1 - ۰}{-۳ - ۰} \rightarrow m_{d'} = \frac{1}{۳}$$

$$\cdot \text{ عمودند} \rightarrow m_d = \frac{-1}{m_{d'}} = \frac{-1}{\frac{1}{۳}} \rightarrow m_d = -۳, \quad B(۲, ۴) \in d$$

$$\rightarrow y - y_B = m_d(x - x_B) \rightarrow y - ۴ = -۳(x - ۲) \rightarrow y = -۳x + 1۰$$

۷ - گزینه ۳ چون دایره بر دو خط مماس است، پس فاصله مرکز دایره با دو خط، مساوی و برابر شعاع دایره است:

$$O(۲, 1), ۳x + ۴y - ۵ = ۰, -۵x + 1۲y - a = ۰$$

$$d_1 = \frac{|۳(۲) + ۴(1) - ۵|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۵}{۵} = 1$$

$$d_۲ = \frac{|-۵(۲) + 1۲(1) - a|}{\sqrt{(-۵)^۲ + 1۲^۲}} = \frac{|۲ - a|}{\sqrt{1۶۹}} = \frac{|۲ - a|}{1۳}$$

$$d_1 = d_۲ \rightarrow \frac{|۲ - a|}{1۳} = 1 \rightarrow |۲ - a| = 1۳ \rightarrow \begin{cases} ۲ - a = 1۳ \rightarrow ۲ - 1۳ = a \rightarrow a = -11 \\ ۲ - a = -1۳ \rightarrow ۲ + 1۳ = a \rightarrow a = 1۵ \end{cases}$$

توجه کنید فاصله نقطه  $A \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}$  از خط به معادله  $ax + by + c = ۰$  از رابطه  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$  به دست می‌آید.

۸ - گزینه ۱ ابتدا با استفاده از مختصات دو سر قطر، مختصات مرکز دایره را محاسبه می‌کنیم. مرکز دایره وسط قطر قرار دارد پس:

$$O' \begin{cases} x_O = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{-۴ + 1}{۲} = -\frac{۳}{۲} \\ y_O = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۷ + ۵}{۲} = ۶ \end{cases} \Rightarrow O' \begin{cases} -\frac{۳}{۲} \\ ۶ \end{cases}$$

حال باید معادله خطی را بنویسیم که از نقاط  $O'$  و مبدأ مختصات  $O$  عبور می‌نماید. ابتدا شیب را محاسبه می‌نماییم.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 0}{-\frac{3}{2} - 0} = -4 \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = -4(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = -4x \Rightarrow \boxed{y + 4x = 0}$$

۹ - گزینه ۳

$$(m-1)x^2 + 6x + 4 - m = 0 \rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها } P = \frac{4-m}{m-1} = 2$$

$$\rightarrow 4 - m = 2m - 2 \rightarrow 6 = 3m \rightarrow \boxed{m = 2}$$

$$\rightarrow x^2 + 6x + 2 = 0 \rightarrow \text{ریشه‌ها } = \alpha, \beta \rightarrow \begin{cases} \text{ضرب ریشه‌ها : } S = -6 \\ \text{جمع ریشه‌ها : } P = 2 \end{cases}$$

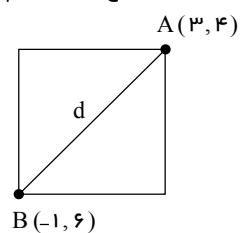
$$\text{مجموع مربعات ریشه‌ها} = \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = (-6)^2 - 2(2) = 36 - 4 \rightarrow \boxed{\alpha^2 + \beta^2 = 32}$$

۱۰ - گزینه ۲ مربع یک لوزی هم محسوب می‌شود که قطرهای برابر دارد لذا می‌توان از رابطه مساحت لوزی استفاده کرد. قدم اول محاسبه طول پاره خط AB یا همان قطر مربع می‌باشد.

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\text{قطر مربع } d = |AB| = \sqrt{(3+1)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{20}$$

$$\text{مساحت } S = \frac{d^2}{2} = \frac{(\sqrt{20})^2}{2} = 10$$



۱۱ - گزینه ۱

$$y = \frac{-3}{4}x \rightarrow 4y = -3x \rightarrow 3x + 4y = 0$$

پس دو خط  $3x + 4y = 6$  و  $3x + 4y = 0$  موازی هستند و مرکز دایره در معادله خط وسط این دو خط صدق می‌کند، یعنی:

$$3x + 4y = \frac{6+0}{2} \rightarrow 3x + 4y = 3 \quad (*)$$

مرکز دایره هم روی خط  $y = x - 1$  قرار دارد پس مختصات مرکز دایره  $C \begin{cases} \alpha \\ \alpha - 1 \end{cases}$  است و این مختصات را در معادله خط  $(*)$  قرار می‌دهیم:

$$3\alpha + 4(\alpha - 1) = 3 \rightarrow 7\alpha = 7 \rightarrow \alpha = 1 \rightarrow C \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow |CO| = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = 1$$

۱۲ - گزینه ۱ با توجه به معادله خط  $d_1$ ، نقاط A و B را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \sqrt{(2-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$$

هم‌چنین با توجه به معادله خط  $d_2$  داریم:

$$C = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow CD = \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16} = 4\sqrt{2}$$

ارتفاع ذوزنقه ABCD برابر است با فاصله دو خط  $d_1$  و  $d_2$ .

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow h = \frac{|-4 - (-2)|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{مجموع دو قاعده}}{\text{ارتفاع}} = \frac{(2\sqrt{2} + 4\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 6$$

۱۳ - گزینه ۱ شرط آنکه معادله‌ی درجه دوم  $0 = 2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{2}m + 2$  فاقد ریشه‌ی حقیقی باشد، آن است که دلتای معادله، منفی باشد. پس داریم:

$$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 4(2)\left(\frac{1}{2}m + 2\right) = (m^2 + 2m + 1) - 4m - 16$$

$$= m^2 - 2m - 15 = (m-5)(m+3) < 0 \rightarrow \frac{m}{-3} \begin{matrix} -\infty & -3 & 5 & +\infty \\ + & 0 & - & 0 & + \end{matrix} \rightarrow -3 < m < 5$$

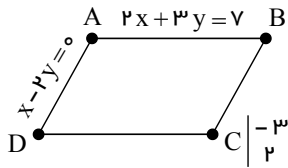
۱۴ - گزینه ۲

$$(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0 \xrightarrow{x^2 + x = A} A^2 - 18A + 72 = 0 \Rightarrow (A-12)(A-6) = 0$$

$$A = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -1 \Rightarrow \alpha + \beta + \alpha' + \beta' = -2$$

$$A = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \alpha' + \beta' = -\frac{b}{a} = -1$$

۱۵ - گزینه ۳



یک شکل فرضی رسم می‌کنیم. توجه کنید که مختصات نقطه‌ی  $(-3, 2)$  در هیچ‌کدام از خطوط داده شده صدق نمی‌کند پس این نقطه را رأسی در نظر می‌گیریم که روی هیچ‌کدام از این اضلاع نیست. در شکل بالا رأس  $C$  است.

$$A \text{ مختصات نقطه‌ی } \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2, 1)$$

حالا معادله‌ی ضلع  $BC$  را می‌نویسیم. نقطه‌ی  $C$  روی این خط است و شیب آن برابر شیب خط  $x - 2y = 0$  یعنی برابر  $\frac{1}{2}$  می‌باشد.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x + 3) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$B \text{ مختصات نقطه‌ی } \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow B(-1, 3)$$

## پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴

۴ - ۴

۷ - ۳

۱۰ - ۲

۱۳ - ۱

۲ - ۲

۵ - ۱

۸ - ۱

۱۱ - ۱

۱۴ - ۲

۳ - ۳

۶ - ۲

۹ - ۳

۱۲ - ۱

۱۵ - ۳