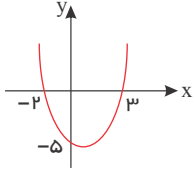


۱- شکل زیر، نمودار تابع درجه دوم به معادله $y = ax^2 + bx + c$ را نشان می‌دهد. حاصل $a + b + c$ کدام است؟ #۹۹۷۸۸-م-متوسط-قلم چی-۱۳۹۴



- ۵ (۱) ۵ (۲)
۶ (۳) -۶ (۴)

۲- اگر مجموعه جواب نامعادله $ax^2 + ax + 3 < 0$ به صورت $\mathbb{R} - [b, 1]$ باشد، $a + b$ کدام است؟ #۳۰۵۶۹۵-م-سخت-قلم چی-۱۳۹۷

- $-\frac{7}{2}$ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{45}{2}$ (۳) -۱ (۴)

۳- مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = |x|$ و $y = 5 - |x - 1|$ ، کدام است؟ #۳۵۱۳۸۱-م-متوسط-سراسری-۱۳۹۷

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

۴- اگر $\sqrt{4x + 8} - \sqrt{4x - 16} = 3$ ، حاصل $\sqrt{4x + 8} + \sqrt{4x - 16}$ کدام است؟ #۴۵۲۲۱۱-م-متوسط-قلم چی-۱۳۹۸

- ۱ (۱) ۸ (۲) ۳ (۳) ۲۴ (۴)

۵- دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، a کدام است؟ #۲۲۹۳۵۰-م-آسان-سراسری-۱۳۹۶

- $\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴)

۶- در یک دنباله حسابی، جملات سوم، هفتم و نهم می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از دنباله‌ی هندسی باشند. چندمین جمله‌ی این دنباله حسابی، صفر است؟ #۵۹۴۱-م-سخت-سراسری-۱۳۸۸

- ۹ (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴)

۷- سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟ #۴۶۴۲۲۷-م-سخت-سراسری-۱۳۹۸

- ۱۲ (۱) ۱۵ (۲) ۲۰ (۳) ۲۵ (۴)

۸- به‌ازای کدام مقادیر m ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ ، دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی است؟ #۳۵۱۴۰۱-م-متوسط-سراسری-۱۳۹۷

- $m < -6$ (۱) $m > 3$ (۲) $0 < m < 3$ (۳) $3 < m < 6$ (۴)

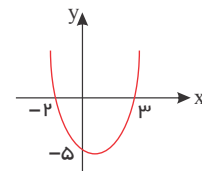
۹- اگر $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه‌ی $f(x)$ برابر کدام است؟ #۳۵۱۴۰۵-م-آسان-سراسری-۱۳۹۷

- $x^2 - x + 3$ (۱) $x^2 - 2x - 1$ (۲) $x^2 - 2x + 1$ (۳) $x^2 - x + 1$ (۴)

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ چون نمودار تابع، محور x ها را در نقاط $x = ۳$ و $x = -۲$ قطع کرده است. پس می‌توانیم معادله‌ی آن را به صورت $y = A(x + ۲)(x - ۳)$ در نظر بگیریم. با توجه به نمودار، مختصات نقطه‌ی $(۰, -۵)$ در معادله‌ی این تابع صدق می‌کند، پس:

$$\begin{aligned} -5 &= A(0 + 2)(0 - 3) \Rightarrow -5 = -6A \Rightarrow A = \frac{5}{6} \\ \Rightarrow y &= \frac{5}{6}(x + 2)(x - 3) = \frac{5}{6}(x^2 - x - 6) = \frac{5}{6}x^2 - \frac{5}{6}x - 5 \\ \Rightarrow a + b + c &= \frac{5}{6} + \left(-\frac{5}{6}\right) + (-5) = -5 \end{aligned}$$



۲ - گزینه ۱

میدانیم: ریشه‌ی هر معادله در خود آن صدق می‌کند

اگر $a < 0$ باشد تعیین علامت عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c < 0$ به شکل زیر است:

x	x_1	x_2	
y	-	+	-

$\Rightarrow x \in \mathbb{R} - [x_1, x_2]$

با توجه به کادر و اینکه بازه $\mathbb{R} - [b, 1]$ جواب معادله $ax^2 + ax + 3 < 0$ است داریم:

$$ax^2 + ax + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = b$$

$$\xrightarrow{x_1=1} a(1)^2 + a(1) + 3 = 0 \Rightarrow a + a + 3 = 0 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = \frac{-3}{2}$$

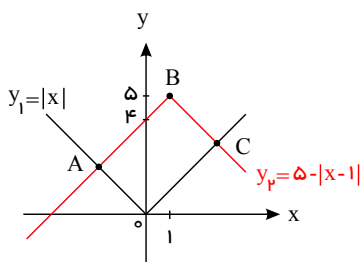
$$-\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 3 = 0 \Rightarrow -3x^2 - 3x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 & \xrightarrow{x_1=1} b = -2 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 & \xrightarrow{x_2=b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{-3}{2} - 2 = \frac{-3 - 4}{2} = \frac{-7}{2}$$

۳ - گزینه ۴

ابتدا نمودار این دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم تا شکل ناحیه محدود مشخص شود.



با توجه به شکل، ناحیه محدود به دو تابع یک مستطیل است که برای محاسبه مساحت آن باید ابتدا نقاط برخورد آن‌ها را بیابیم:

$$y_1 = y_2 \Rightarrow |x| = 5 - |x - 1|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{نقطه } C \xrightarrow{x>} x = 5 - (x - 1) \rightarrow x = 3 \Rightarrow C(3, 3) \\ \text{نقطه } A \xrightarrow{x<} -x = 5 + (x - 1) \rightarrow x = -2 \Rightarrow A(-2, -2) \end{cases}$$

$$OC = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{18}, OA = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

$$S = \text{عرض} \times \text{طول} = \sqrt{18} \times \sqrt{8} = \sqrt{144} = 12$$

$$\sqrt{4x + 8} + \sqrt{4x - 16} = A$$

۲ - گزینه ۲

$$\rightarrow (\sqrt{4x+8} + \sqrt{4x-16})(\sqrt{4x+8} - \sqrt{4x-16}) = (\sqrt{4x+8} - \sqrt{4x-16})A$$

$$\rightarrow (4x+8) - (4x-16) = 3A$$

$$24 = 3A \rightarrow A = 8$$

۵ - گزینه ۲ می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد آن‌گاه $f^{-1}(b) = a$ است.

$$f^{-1}(g(2a)) = 6 \rightarrow f(6) = g(2a) \rightarrow 3 = \frac{2a}{2a-1} \rightarrow 6a - 3 = 2a \rightarrow 4a = 3 \rightarrow a = \frac{3}{4}$$

۶ - گزینه ۳

در هر دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول a_1 و قدر نسبت d جمله‌ی m ام از رابطه‌ی $a_n = a_1 + (n-1)d$ بدست می‌آید و اگر a, b, c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند آن‌گاه $ac = b^2$ است.

$$a_7, a_9, a_9 \Rightarrow a_1 + 2d, a_1 + 6d, a_1 + 8d$$

دنباله‌ی هندسی

$$\rightarrow (a_1 + 2d)(a_1 + 8d) = (a_1 + 6d)^2$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 2a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 36d^2 + 12a_1d$$

$$\Rightarrow 20d^2 + 2a_1d = 0 \xrightarrow[\text{تقسیم بر } d]{} 10d + a_1 = 0 \Rightarrow a_{11} = 0$$

۷ - گزینه ۳ می‌دانیم که $x = vt$ و از آنجا $t = \frac{x}{v}$ است. اگر سرعت جریان آب را v در نظر بگیریم سرعت قایق در جهت حرکت آب $100 + v$ و در خلاف جهت حرکت آب $100 - v$ است.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مسیر رفت } t_1 = \frac{1200}{100+v} \\ \text{مسیر برگشت } t_2 = \frac{1200}{100-v} \end{array} \right. \rightarrow t_2 - t_1 = 5 \rightarrow \frac{1200}{100-v} - \frac{1200}{100+v} = 5$$

$$\rightarrow \frac{1200(100+v) - 1200(100-v)}{(100-v)(100+v)} = 5 \rightarrow \frac{120000 + 1200v - 120000 + 1200v}{10000 - v^2} = 5$$

$$\rightarrow 2400v = 5(10000 - v^2) \rightarrow 480v = 10000 - v^2$$

$$\rightarrow v^2 + 480v - 10000 = 0 \rightarrow (v - 20)(v + 500) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} v = 20 \text{ قی} \\ v = -500 \text{ غقی} \end{cases}$$

البته اصلاً نیازی به این همه محاسبات نمی‌باشد و می‌توانید گزینه‌ها را چک کنید و به راحتی به جواب $v = 20$ برسید.

۸ - گزینه ۴ شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی متمایز باشد آن است که $\Delta > 0$ ، $S < 0$ و $P > 0$ باشد.

$$\Delta > 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac > 0} 4m^2 - 4(m-6)(-3) > 0 \rightarrow m^2 + 3m - 18 > 0 \rightarrow (m+6)(m-3) > 0$$

تعیین علامت

$$\rightarrow m < -6 \text{ یا } m > 3 \quad (I)$$

$$S < 0 \rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \rightarrow \frac{2m}{m-6} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < m < 6 \quad (II)$$

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{-3}{m-6} > 0 \rightarrow m-6 < 0 \rightarrow m < 6 \quad (III)$$

از اشتراک جواب‌های I و II و III به جواب $3 < m < 6$ می‌رسیم.

۹ - گزینه ۴ روش اول:

$$2x - 3 = t \rightarrow 2x = t + 3 \rightarrow x = \frac{t+3}{2}$$

$$\text{پس: } f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+3}{2}\right) + 13 \rightarrow f(t) = (t+3)^2 - 7(t+3) + 13$$

$$\rightarrow f(t) = t^2 + 9 + 6t - 7t - 21 + 13 \rightarrow f(t) = t^2 - t + 1 \rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مانند $x = 2$ را انتخاب می‌کنیم.

$$f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13 \xrightarrow{x=2} f(1) = 16 - 28 + 13 \rightarrow f(1) = 1$$

تنها گزینه‌ی چهارم است که اگر به جای x آن عدد یک قرار دهیم حاصل برابر یک می‌شود.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲

۳ - ۴

۵ - ۲

۷ - ۳

۹ - ۴

۲ - ۱

۴ - ۲

۶ - ۳

۸ - ۴