

باسمه تعالی

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: ۹۶/۱۰/۰۶

نام مدرسه:

نام درس: آمار و احتمال

توجه! لطفا سوالات را در کادر مشخص شده با خط خوش پاسخ دهید. (پاسخ های خارج از کادر تصحیح نخواهد شد)

(۱/۵ نمره)

سوال ۱

مفاهیم زیر را تعریف کنید:

الف) دامنه گزاره نما

در هر گزاره نما به مجموعه مقادیری که می توان آن ها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا گزاره نما به یک گزاره (درست یا غلط) تبدیل شود. دامنه متغیر

گزاره نما می گویند. (۰/۵ نمره)

ب) قانون جذب یا هم پوشانی در مجموعه ها

$$A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$$

(۰/۲۵ نمره)

(۰/۲۵ نمره)

ج) برآمد

به هر عضو فضای نمونه یک برآمد می گویند. (۰/۵ نمره)

(۱/۵ نمره)

سوال ۲

از طریق جدول درستی نشان دهید گزاره زیر همواره درست است. درستی این گزاره را به کمک جبر گزاره ها هم اثبات کنید. (دلایل و قوانین فراموش نشود)

تعریف گزاره شرطی $(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv$

دمورگان $(\sim(p \wedge q) \vee p) \equiv$ (۰/۲۵)

جابه جایی ترکیب اصلی $(\sim p \vee \sim q) \vee p \equiv$ (۰/۲۵)

شرکت پذیری $(\sim q \vee \sim p) \vee p \equiv$ (۰/۲۵)

$\sim q \vee (\sim p \vee p) \equiv \sim q \vee \text{True} \equiv \text{True}$

(۰/۲۵)

p	q	$P \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

(۰/۲۵)

(۰/۲۵)

(۲ نمره)

سوال ۳

ارزش هر یک از دو گزاره زیر را با ذکر دلیل تعیین کنید.

ارزش: نادرست (۰/۲۵)

الف) $\forall n \in \mathbb{N}$ بر ۴ بخش پذیر است \leftrightarrow بر ۴ بخش پذیر است.

مثال نقض مناسب ۶ یا ۲. $n = 2$. این ترکیب دو شرطی همواره درست نیست. (۰/۵)

بر ۴ بخش پذیر است \leftrightarrow بر ۴ بخش پذیر است $\text{True} = \text{False}$

ارزش: درست (۰/۲۵)

ب) $\forall n \in \mathbb{N}$ بر ۳ بخش پذیر است \leftrightarrow بر ۳ بخش پذیر است.

اثبات: n^2 بر ۳ بخش پذیر است \rightarrow بر ۳ بخش پذیر است. (۰/۵ نمره)

بر ۳ بخش پذیر است \rightarrow بر ۳ بخش پذیر است. (۰/۵ نمره)

برهان خلف n^2 بر ۳ بخش پذیر نیست \rightarrow بر ۳ بخش پذیر نیست.

(۱/۵ نمره)

سوال ۴

ارزش هر یک از گزاره های زیر را با ذکر دلیل تعیین کنید. سپس نقیض هر یک را بنویسید.

ارزش: درست (۰/۲۵)

ارزش: درست (۰/۲۵)

الف) $\exists y \in \mathbb{R} : y < 0 \wedge y^2 < 1$

نقیض: $\forall y \in \mathbb{R} : y \geq 0 \vee y^2 \geq 1$ (۰/۲۵)

ارزش: نادرست (۰/۲۵)

ارزش: نادرست (۰/۲۵)

ب) $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-9}{x+3} = x-3$

نقیض: $\exists x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-9}{x+3} \neq x-3$ (۰/۲۵)

(۱/۵ نمره)

سوال ۵

اگر $X = \{a, b, c\}$ باشد. مجموعه توانی آن؛ یعنی، $p(X)$ و مجموعه همه افزایش های X را بنویسید.

$p(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

ساختار درست (۰/۲۵)، ذکر چند مورد درست (۰/۲۵)، ذکر کامل هر هشت مورد (۰/۲۵)

$M = \{\{\{a, b, c\}\}, \{\{a\}, \{b, c\}\}, \{\{b\}, \{a, c\}\}, \{\{c\}, \{a, b\}\}, \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}\}$

ساختار درست (۰/۲۵)، ذکر چند افزایش درست (۰/۲۵)، ذکر کامل هر پنج افزایش (۰/۲۵)

باسمه تعالی

تاریخ آزمون: ۹۶/۱۰/۰۶
نام درس: آمار و احتمال

نام و نام خانوادگی:
نام مدرسه:

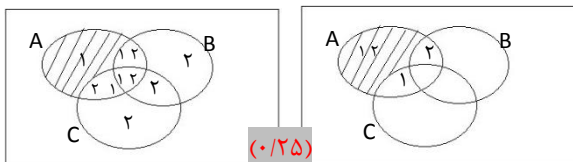
سوال ۶

(۱/۵ نمره)

درستی هر یک از تساوی های زیر را هم با نمودار ون و هم با روش استنتاجی ثابت کنید.

الف) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ (استنتاج به کمک جبر مجموعه ها)

$(A - B) \cap (A - C) = (A \cap B') \cap (A \cap C') = (A \cap A) \cap (B' \cap C') = A \cap (B' \cap C') = A \cap (B \cup C)' = A - (B \cup C)$ (۰/۵)

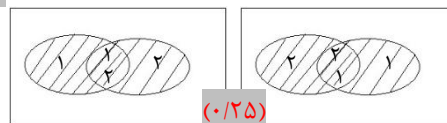


ب) $A \cup B = B \cup A$ (استنتاج به کمک عضو گیری و جبر گزاره ها)

$A \cup B \subset B \cup A, B \cup A \subset A \cup B$ یا $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in B \cup A$ (۰/۲۵)

$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B \leftrightarrow x \in B \vee x \in A \leftrightarrow x \in (B \cup A)$ (۰/۲۵)

جا به جایی



(۱ نمره)

سوال ۷

مقادیر x و y را طوری بیابید که دو زوج مرتب $(x^2 - y^2, 3)$ و $(x - y, 15)$ با هم برابر باشند.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \rightarrow (x - y)(x + y) = 15 \rightarrow 3(x + y) = 15 \rightarrow x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases} \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4, y = 1$$
 (۰/۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

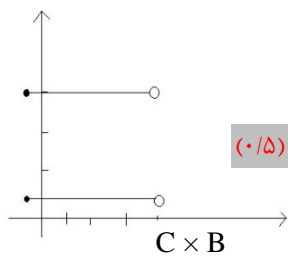
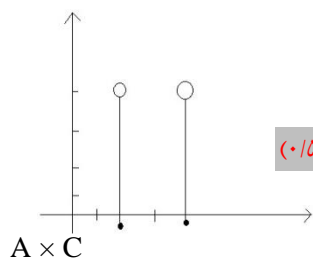
(۲ نمره)

سوال ۸

مجموعه های $A = \{2^k : k \in \mathbb{N}, k \leq 2\}$ و $B = \{x^2 : x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$ و $C = [-1, 4]$ مفروضند.

الف) مجموعه های $A, B, A \times B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید. $A = \{2, 4\}$ (۰/۲۵), $B = \{1, 4, 9\}$ (۰/۲۵)

با نوشتن اعضا یا رسم $A \times B = \{(2,1), (2,4), (2,9), (4,1), (4,4), (4,9)\}$ (۰/۵)



ب) نمودار $A \times C$ و $C \times B$ را رسم کنید.

(۲ نمره)

سوال ۹

تاس و سکه سالمی را با هم پرتاب می کنیم. مطلوبست:

$$S = \left\{ \begin{matrix} \text{پشت } (1), \text{ پشت } (2), \text{ پشت } (3), \text{ پشت } (4), \text{ پشت } (5), \text{ پشت } (6) \\ \text{رو } (1), \text{ رو } (2), \text{ رو } (3), \text{ رو } (4), \text{ رو } (5), \text{ رو } (6) \end{matrix} \right\}$$
 (۵/۰)

الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی

ب) پیشامد A که در آن تاس، عدد بزرگتر از ۳ بیاید.

$A = \{(4, \text{پشت}), (5, \text{پشت}), (6, \text{پشت}), (4, \text{رو}), (5, \text{رو}), (6, \text{رو})\}$ (۰/۵)

ج) پیشامد B که در آن سکه پشت بیاید.

$B = \{(1, \text{پشت}), (2, \text{پشت}), (3, \text{پشت}), (4, \text{پشت}), (5, \text{پشت}), (6, \text{پشت})\}$ (۰/۵)

د) پیشامد $A \cap B'$ را مشخص کنید.

$A \cap B' = A - B = \{(4, \text{رو}), (5, \text{رو}), (6, \text{رو})\}$ (۰/۵)

باسمه تعالی

تاریخ آزمون: ۹۶/۱۰/۰۶
نام درس: آمار و احتمال

نام و نام خانوادگی:
نام مدرسه:

(۱/۵ نمره)

سوال ۱۰

اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند، به روش استنتاجی و به کمک اصول و قضایای احتمال ثابت کنید:

$$p(\emptyset) = p(S') = 1 - p(S) = 1 - 1 = 0$$

الف) $p(\emptyset) = 0$

(۰/۲۵)

(۰/۲۵)

ب) اگر $A \subset B$ آنگاه $p(B) \leq p(A)$

$$(A - B) \cap B = (A \cap B') \cap B = A \cap (B' \cap B) = A \cap \emptyset = \emptyset$$

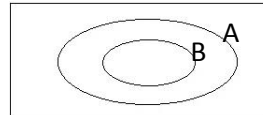
(۰/۵)

مثلا B و $A - B$ دو پیشامد ناسازگارند زیرا

$$p((A - B) \cup B) = p(A - B) + p(B)$$

پس طبق اصل سوم می توان نوشت

$$\left\{ \begin{aligned} p(A) &= p(A - B) + p(B) \\ 0 &\leq p(A - B) \end{aligned} \right. \rightarrow p(B) \leq p(A) \quad (۰/۵)$$



(۲/۵ نمره)

سوال ۱۱

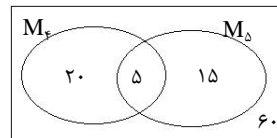
عددی به تصادف از مجموعه $S = \{100, \dots, 199\}$ انتخاب می کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال آن که:

$$|S| = 199 - 100 + 1 = 100$$

$$|M_f \cap M_d| = |M_f| = |\{100, 120, \dots, 180\}| = 5$$

$$p(M_f \cap M_d) = \frac{|M_f \cap M_d|}{|S|} = \frac{5}{100} = 0.05$$

(۰/۵)



الف) عدد انتخابی بر ۴ و ۵ بخش پذیر باشد.

ب) عدد انتخابی بر ۴ یا ۵ بخش پذیر باشد.

$$P(M_f \cup M_d) = P(M_f) + P(M_d) - P(M_f \cap M_d) = \frac{20}{100} + \frac{15}{100} - \frac{5}{100} = \frac{30}{100} = 0.3 \quad (۰/۵)$$

ج) عدد انتخابی نه بر ۴ بخش پذیر باشد و نه بر ۵

$$P(M_f' \cap M_d') = P((M_f \cup M_d)') = 1 - P(M_f \cup M_d) = 1 - \frac{30}{100} = \frac{70}{100} = 0.7 \quad (۵/۰)$$

د) عدد انتخابی دست کم یک رقم تکراری داشته باشد.

$$P(\text{رقم تکراری}) = 1 - P(\text{بدون رقم تکراری}) = 1 - \frac{1 \cdot 9 \cdot 8}{100} = 1 - \frac{72}{100} = \frac{28}{100} = 0.28 \quad (۰/۲۵)$$

ه) سه رقم عدد انتخابی به ترتیب صعودی باشند (یکان < دهگان < صدگان)

$$(۰/۵) \quad P(A) = \binom{4}{3} \cdot \frac{28}{100} = \frac{28}{100}$$

کافی است ۱ و دو رقم متفاوت دیگر بزرگتر از ۱ انتخاب کنیم و آن ها را از کوچک به بزرگ بنویسیم.

(۱/۵ نمره)

سوال ۱۲

تاسی به گونه ای ساخته شده است که احتمال آمدن هر عدد فرد سه برابر احتمال آمدن هر عدد زوج است. این تاس را یک بار پرتاب می کنیم.

۱	۲	۳	۴	۵	۶
۳x	x	۳x	x	۳x	x

(۰/۲۵)

مطلوبست احتمال آن که عدد ظاهر شده:

الف) ۴ باشد

$$P(s) = 1 \rightarrow 3x + x + 3x + x + 3x + x = 1 \rightarrow 12x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{12} = P(\{4\}) \quad (۰/۲۵)$$

ب) ۱ نباشد

$$P(\{1\}') = 1 - P(1) = 1 - 3x = 1 - \frac{3}{12} = \frac{9}{12} = 0.75 \quad (۰/۵)$$

ج) عددی اول باشد

$$(۰/۲۵) \quad P(\text{Prime}) = P(\{2, 3, 5\}) = x + 3x + 3x = 7x = \frac{7}{12} \quad (۰/۲۵)$$