

۱- در دنباله‌ی عددی با جمله‌ی عمومی $a_n = 3 + \frac{n}{2}$ مجموع جملات شروع از جمله یازده و ختم به جمله بیستم کدام است؟

۱۳۹۱-منا-سخت-م-#۱۴۵۴۴

- ۱) ۹۷٫۵ ۲) ۹۸٫۵ ۳) ۱۰۷٫۵ ۴) ۱۰۸٫۵

۲- در معادله $3x^2 - 15x + m = 0$ ، اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه‌ی دیگر بیشتر باشد m کدام است؟

۱۳۸۲-م-متوسط-سراسری-#۱۷۰۲۸

- ۱) $\frac{59}{5}$ ۲) $\frac{63}{5}$ ۳) $\frac{59}{4}$ ۴) $\frac{63}{4}$

۳- در مستطیلی به مساحت ۶٫۵ و محیط ۱۰٫۵، اختلاف اندازه‌ی طول و عرض کدام است؟

۱۳۹۹-م-متوسط-قلم‌چی-#۴۹۶۲۴۵

- ۱) ۱ ۲) ۱٫۲۵ ۳) ۱٫۵ ۴) ۱٫۷۵

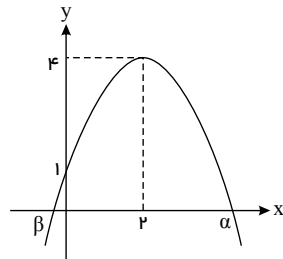
۴- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 4x - 3 = 0$ باشند، آن‌گاه حاصل $\alpha^2 + 3\alpha - \beta$ کدام است؟

۱۳۹۷-م-متوسط-قلم‌چی-#۲۵۶۶۳۰

- ۱) ۷ ۲) -۷ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) -۲

۵- شکل زیر مربوط به تابع درجه‌ی دوم $y = f(x)$ است. حاصل $\alpha^3 + \beta^3$ کدام است؟

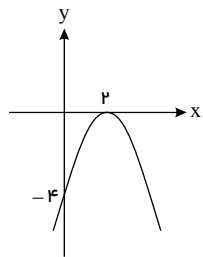
۱۳۹۸-م-متوسط-قلم‌چی-#۴۴۹۷۷۳



- ۱) ۶۰ ۲) ۷۰ ۳) ۸۰ ۴) ۹۰

۶- اگر شکل زیر نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، حاصل $a - b + c$ کدام است؟

۱۳۹۹-م-متوسط-قلم‌چی-#۴۹۸۷۸۱



- ۱) صفر ۲) -۱۲ ۳) -۹ ۴) -۶

۷- به ازای کدام مقادیر m ، منحنی به معادله‌ی $y = (m + 2)x^2 - 2x + 1$ از هر چهار ناحیه‌ی محورهای مختصات می‌گذرد؟

۱۳۸۷-م-متوسط-خارج از کشور-#۸۳۳۲۱

- ۱) $m < -2$ ۲) $m < -1$ ۳) $-2 < m < -1$ ۴) $-4 < m < -2$

۸- در دو دنباله‌ی حسابی به صورت $\{2, 5, 8, \dots\}$ و $\{3, 7, 11, \dots\}$ ، مجموع اعداد مشترک دو دنباله که در بازه (۱۰۰, ۲۰۰) قرار دارند، کدام است؟

۱۳۹۵-م-سخت-قلم‌چی-#۱۲۱۳۷۵

- ۱) ۹۶۸ ۲) ۱۲۰۰ ۳) ۱۱۹۲ ۴) ۱۲۰۲

۹- اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 - 5x + 3 = 0$ باشند، حاصل عبارت $A = \frac{\alpha^2}{5 - \beta} + \frac{\beta^2}{5 - \alpha}$ کدام است؟

۱۳۹۶-م-سخت-قلم‌چی-#۱۳۳۰۴۳

- ۱) ۵ ۲) -۳ ۳) -۵ ۴) ۳

۱۰- در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول آن ۱۵۳ می باشد. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟

۷۷۲۸-نم-متوسط-سراسری-۱۳۸۹

- ۱) $\frac{81}{16}$
 ۲) ۹
 ۳) ۸
 ۴) ۱۶

۱۱- بین دو عدد ۳۲۴ و ۴، سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل، تشکیل یک دنباله هندسی دهند، مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است؟

۴۷۱۸۷-نم-متوسط-خارج از کشور-۱۳۹۱

- ۱) ۴۸۲
 ۲) ۴۸۴
 ۳) ۴۸۶
 ۴) ۴۸۸

۸۴۹۶۲-نم-سخت-سراسری-۱۳۹۳

۱۲- حاصل عبارت $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$ ، به ازای $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ کدام است؟

- ۱) ۲
 ۲) ۳
 ۳) ۴
 ۴) ۵

۱۳- اگر α, β ریشه های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب های کدام معادله، به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1 \right\}$ است؟

۷۸۳۷۳-نم-متوسط-سراسری-۱۳۹۲

- ۱) $4x^2 - 5x + 1 = 0$
 ۲) $4x^2 - 3x + 1 = 0$
 ۳) $4x^2 - 5x - 1 = 0$
 ۴) $4x^2 - 3x - 1 = 0$

۱۴- اگر یکی از ریشه های معادله $x(ax^2 - x - 5) = 2$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه دیگر آن کدام است؟

۸۳۳۳۱-نم-متوسط-خارج از کشور-۱۳۸۷

- ۱) -۲
 ۲) $-\frac{3}{2}$
 ۳) $\frac{1}{2}$
 ۴) $\frac{3}{2}$

۶۸۶۹-نم-متوسط-سراسری-۱۳۹۰

۱۵- مجموع ریشه های حقیقی معادله $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ کدام است؟

- ۱) ۴
 ۲) -۲
 ۳) ۲
 ۴) -۴

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

روش اول) جمله یازدهم دنباله را جمله ی اول فرض می‌کنیم. پس جمله ی بیستم تبدیل به جمله ی دهم می‌شود. بنابراین مجموع ده جمله ی اول را به دست می‌آوریم.

$$a_n = 3 + \frac{n}{2}$$

$$S_{11 \rightarrow 20} = \frac{10}{2} [a_{11} + a_{20}] = 5 \left[\left(3 + \frac{11}{2} \right) + \left(3 + \frac{20}{2} \right) \right] = 107,5$$

روش دوم)

$$a_n = 3 + \frac{n}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + \dots + a_{20} &= s_{20} - s_{10} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) - \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) \\ &= 20a_1 + 190d - 10a_1 - 45d = 10a_1 + 145d = 10\left(\frac{7}{2}\right) + 145\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{70}{2} + \frac{145}{2} = \frac{215}{2} = 107,5 \end{aligned}$$

توجه کنیم که در هر دنباله ی عددی با جمله ی عمومی a_n ، ضریب n ، در برابر d است.

۲ - گزینه ۴

اگر x' و x'' ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه:

$$S = x' + x'' = -\frac{b}{a}, \quad d = |x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\begin{cases} x' = x'' + 2 \\ x' + x'' = -\frac{b}{a} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' - x'' = 2 \\ x' + x'' = 5 \end{cases} \Rightarrow x' = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{49}{4}\right) - 15\left(\frac{7}{2}\right) + m = 0 \Rightarrow 147 - 210 + 4m = 0 \Rightarrow -63 + 4m = 0 \Rightarrow m = \frac{63}{4}$$

راه حل دوم:

$$|x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow \frac{\sqrt{225 - 12m}}{3} = 2 \Rightarrow \sqrt{225 - 12m} = 6$$

$$\Rightarrow 225 - 12m = 36 \Rightarrow m = \frac{63}{4}$$

۳ - گزینه ۲ اگر a را طول مستطیل و b را عرض مستطیل در نظر بگیریم، داریم:

$$\text{محیط مستطیل} = 2(a + b) = 10,5 \Rightarrow a + b = \frac{10,5}{2}, \quad \text{مساحت مستطیل} = ab = 6,5 \Rightarrow S = \frac{10,5}{2}, \quad P = 6,5$$

a, b ریشه های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ یعنی $x^2 - \frac{10,5}{2}x + 6,5 = 0$ هستند، بنابراین اختلاف طول و عرض همان تفاضل ریشه های معادله است. پس داریم:

$$x^2 - \frac{10,5}{2}x + 6,5 = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 10,5x + 13 = 0 \Rightarrow \Delta = (-10,5)^2 - 4 \times 2 \times 13 = 25$$

$$\text{تفاضل ریشه ها} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|x^2 \text{ ضریب}|} = \frac{\sqrt{25}}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

۴ - گزینه ۱ ریشه های معادله، در خود معادله صدق می‌کنند، بنابراین:

$$\alpha^2 + 4\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha = 3 (*)$$

از طرفی داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{1} = -4 (**)$$

$$\alpha^2 + 3\alpha - \beta = \alpha^2 + 4\alpha - \alpha - \beta$$

$$\stackrel{(*)}{=} 3 - \alpha - \beta = 3 - (\alpha + \beta) \stackrel{(**)}{=} 3 - (-4) = 7$$

۵ - گزینه ۳

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + 1$$

$$\text{رأس } x = -\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a, \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow f(2) = 4 \Rightarrow 4a + 2b + 1 = 4$$

$$\Rightarrow 4a + 2(-4a) = 4 \Rightarrow -4a = 4 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}, b = -4\left(-\frac{3}{4}\right) = 3$$

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x + 1$$

۶ - گزینه ۳
 α و β ریشه‌های معادله $-\frac{3}{4}x^2 + 3x + 1 = 0$ هستند، داریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{-\frac{3}{4}} = 4, P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2PS = 4^2 - 2\left(-\frac{4}{3}\right) \times 4 = 16 + \frac{16}{3} = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}$$

۶ - گزینه ۳

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

سهمی در $x = 2$ بر محور x مماس است: پس رأس سهمی نقطه $(2, 0)$ است، داریم:

$$\text{رأس سهمی } S(2, 0) \in f \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a \quad (*)$$

$$f(x) = a(x-2)^2 \xrightarrow{(0,-4) \in f} -4 = a(0-2)^2 \Rightarrow a = -1 \xrightarrow{(*)} b = 4, (0,-4) \in f \Rightarrow c = -4$$

در نتیجه:

$$\left. \begin{matrix} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a - b + c = -1 - 4 + (-4) = -9$$

۷ - گزینه ۱ اگر در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، $\frac{c}{a} < 0$ باشد. (یعنی a و c مختلف علامه باشند)، تابع درجه دوم از ۴ ناحیه می‌گذرد. بنابراین باید: $m + 2 < 0$ یعنی $m < -2$

۸ - گزینه ۳

$$\left. \begin{matrix} 2, 5, 8, \dots \Rightarrow d_1 = 3 \\ 3, 7, 11, \dots \Rightarrow d_2 = 4 \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{cases} \text{قدر نسبت دنباله شامل جملات مشترک دو دنباله} = 12 = [3, 4] \text{ ک.م.م} \\ \text{اولین جمله مشترک دو دنباله} = 11 \end{cases}$$

$$\text{دنباله جدید } a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow \text{جمله عمومی دنباله حسابی } 11, 23, 35, \dots$$

$$a_n = 11 + (n-1) \times 12 = 11 + 12n - 12 = 12n - 1$$

$$101 < 12n < 201 \Rightarrow 100 < 12n - 1 < 200 \Rightarrow \text{چون گفته اعداد مشترک دو دنباله که در بازه } (100, 200) \text{ است}$$

$$\frac{101}{12} < n < \frac{201}{12} \rightarrow 8,41 < n < 16,75 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} 9 \leq n \leq 16$$

یعنی مجموع جملات نهم تا شانزدهم مورد نظر سوال است:

$$\underbrace{a_9 + a_{10} + a_{11} + \dots + a_{16}}_{\text{جمله}} \Rightarrow \begin{cases} a_9 = (100, 200) \text{ اولین جمله مشترک در بازه} = 12(9) - 1 = 107 \\ a_{16} = (100, 200) \text{ آخرین جمله مشترک در بازه} = 12(16) - 1 = 191 \end{cases}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_8 = \frac{\lambda}{2}(a_1 + a_\lambda) = \frac{\lambda}{2}(107 + 191) = 4(298) = 1192$$

۹ - گزینه ۱ ابتدا مجموع و حاصلضرب ریشه‌ها را می‌یابیم:

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 5 \\ \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = 3 \end{cases}$$

چون α و β ریشه‌های معادله هستند پس در خود معادله صدق می‌کنند.

$$\alpha - 5 = \frac{-3}{\alpha} \Rightarrow 5 - \alpha = \frac{3}{\alpha}$$

$$\alpha - 5 = \frac{-3}{\alpha} \Rightarrow 5 - \alpha = \frac{3}{\alpha}$$

به همین ترتیب $5 - \beta = \frac{3}{\beta}$ است. پس:

$$A = \frac{\alpha^r}{5 - \beta} + \frac{\beta^r}{5 - \alpha} = \frac{\alpha^r}{\frac{3}{\beta}} + \frac{\beta^r}{\frac{3}{\alpha}} = \frac{\alpha^r \beta + \alpha \beta^r}{3} = \frac{\alpha \beta (\alpha + \beta)}{3} = 5$$

۱۰ - گزینه ۴

تذکر: در دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q داریم

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$\left. \begin{aligned} S_7 = 136 &\Rightarrow \frac{a(q^7 - 1)}{q - 1} = 136 \\ S_8 = 153 &\Rightarrow \frac{a(q^8 - 1)}{q - 1} = 153 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_8}{S_7} = \frac{\frac{a(q^8 - 1)}{q - 1}}{\frac{a(q^7 - 1)}{q - 1}} = \frac{153}{136}$$

$$\Rightarrow q^8 + 1 = \frac{153}{136} \Rightarrow q^8 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_8} = \frac{a}{aq^7} = 16$$

۱۱ - گزینه ۲ جمله عمومی در دنباله هندسی برابر است با: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

جمله اول را $a_1 = 4$ و در نتیجه جمله پنجم را برابر $a_5 = 324$ در نظر می‌گیریم. با توجه به صورت سؤال، این پنج جمله مثبت هستند، یعنی $q > 0$ و داریم:

$$a_5 = a_1 q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{324}{4} = 81 \xrightarrow{q > 0} q = 3$$

مجموع این پنج جمله برابر است با:

$$S_5 = a_1 \left(\frac{q^5 - 1}{q - 1} \right) \Rightarrow S_5 = 4 \left(\frac{3^5 - 1}{3 - 1} \right) = 4 \times \frac{243 - 1}{2} = 484$$

۱۲ - گزینه ۱ تذکر: در دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

صورت کسر مجموع جملات یک دنباله هندسی با قدر نسبت t است که دوازده جمله دارد و مخرج کسر مجموع چهار جمله اول یک دنباله هندسی با قدر نسبت t^r است.

$$t^{11} + t^{10} + \dots + 1 = 1 \times \frac{t^{12} - 1}{t - 1} \quad (a_1 = 1, q = t)$$

$$t^9 + t^8 + t^7 + 1 = 1 \times \frac{(t^r)^9 - 1}{t^r - 1} \quad (a_1 = 1, q = t^r)$$

$$\frac{t^{11} + t^{10} + \dots + 1}{t^9 + t^8 + t^7 + 1} = \frac{\frac{t^{12} - 1}{t - 1}}{\frac{t^{9r} - 1}{t^r - 1}} = \frac{t^r - 1}{t - 1} = t^r + t + 1$$

$$t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{حال با قرار دادن}$$

$$= \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4} + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = 2$$

۱۳ - گزینه ۳

روش اول: ریشه‌های معادله جدید از معکوس ریشه‌های معادله قبلی یک واحد بیشتر است.

$$2x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها معکوس شده}} -4x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{یک واحد به ریشه‌ها اضافه شده}} -4(x-1)^2 - 3(x-1) + 2 = 0$$

$$-4x^2 + 8x - 4 - 3x + 3 + 2 = 0 \Rightarrow -4x^2 + 5x + 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

روش دوم:

$$\alpha + \beta = \frac{3}{2}, \alpha\beta = -2, \alpha' = \frac{1}{\alpha} + 1, \beta' = \frac{1}{\beta} + 1$$

$$S' = \alpha' + \beta' = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{5}{4}$$

$$P' = \alpha'\beta' = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = -\frac{1}{4}$$

$$x^r - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^r - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 4x^r - 5x - 1 = 0$$

۱۴ - گزینه ۲ توجه: هرگاه $x = k$ یکی از ریشه‌های معادله $P(x) = 0$ باشد، آنگاه تابع $P(x)$ بر $(x - k)$ بخش پذیر است.

ابتدا با قرار دادن $x = 2$ در معادله‌ی داده شده، a را می‌یابیم:

$$x(ax^r - x - 5) = 2 \xrightarrow{x=2} 2(4a - 2 - 5) = 2 \Rightarrow 4a - 7 = 1 \Rightarrow a = 2$$

پس معادله به صورت $2x^r - x^r - 5x - 2 = 0$ می‌شود. حال با تقسیم معادله بر $x - 2$ آن را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$2x^r - x^r - 5x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(2x^r + 3x + 1) = 0$$

می‌دانیم مجموع دو ریشه‌ی دیگر که ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم داخل پرانتز می‌باشند، برابر با $-\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$ می‌شود.

۱۵ - گزینه ۲

$$(x^r + x)^r - 18(x^r + x) + 72 = 0 \xrightarrow{x^r + x = A} A^r - 18A + 72 = 0 \Rightarrow (A - 12)(A - 6) = 0$$

$$A = 12 \Rightarrow x^r + x - 12 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -1 \Rightarrow \alpha + \beta + \alpha' + \beta' = -2$$

$$A = 6 \Rightarrow x^r + x - 6 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \alpha' + \beta' = -\frac{b}{a} = -1$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳

۴ - ۱

۷ - ۱

۱۰ - ۴

۱۳ - ۳

۲ - ۴

۵ - ۳

۸ - ۳

۱۱ - ۲

۱۴ - ۲

۳ - ۲

۶ - ۳

۹ - ۱

۱۲ - ۱

۱۵ - ۲