

۱۳۹۸-متنا-آسان-م-#۳۶۵۹۲۴

۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، درایه واقع در سطر سوم و ستون دوم AB کدام است؟

- ۱ (۱) -۱ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴)

۱۳۹۸-متنا-سخت-م-#۳۶۶۰۵۵

۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس A^{100} کدام است؟

- ۱ (۱) $\begin{bmatrix} 101 & -100 \\ 100 & -99 \end{bmatrix}$ ۲ (۲) $\begin{bmatrix} 200 & -100 \\ 100 & 99 \end{bmatrix}$ ۳ (۳) $\begin{bmatrix} 101 & 100 \\ -100 & 99 \end{bmatrix}$ ۴ (۴) $\begin{bmatrix} 200 & -100 \\ 100 & 0 \end{bmatrix}$

۱۳۹۹-قلم-چی-م-آسان-#۵۰۳۵۰۰

۳- اگر $A = [i^2 - j]_{2 \times 3}$ و $B = [j^2 - i]_{3 \times 2}$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس AB کدام است؟

- ۱ (۱) صفر ۲ (۲) ۹ ۳ (۳) ۳۶ ۴ (۴) ۵۴

۱۳۹۹-قلم-چی-م-متوسط-#۵۶۸۹۶۳

۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $(A + I)^4 = mA + I$ باشد، آنگاه مقدار m کدام است؟

- ۱ (۱) -۱۵ ۲ (۲) ۱۵ ۳ (۳) -۳۰ ۴ (۴) ۳۰

۱۳۹۹-قلم-چی-م-متوسط-#۵۷۲۱۵۷

۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & c \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $A \times B$ ماتریسی اسکالر باشد، حاصل $a + b + c$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۱۲ ۲ (۲) ۶ ۳ (۳) ۴ ۴ (۴) صفر

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} \times & \times \\ \times & \times \\ \times & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$a_{32} = 3 \times 0 + 1 \times 3 + 2 \times 1 + (-1) \times 1 \rightarrow a_{32} = 4$$

۲ - گزینه ۱

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{حس}} A^n = \begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{n=100} A^{100} = \begin{bmatrix} 101 & -100 \\ 100 & -99 \end{bmatrix}$$

۳ - گزینه ۴ ابتدا ماتریس‌های A و B را تشکیل می‌دهیم.

$$A = \begin{bmatrix} 1^2 - 1 & 1^2 - 2 & 1^2 - 3 \\ 2^2 - 1 & 2^2 - 2 & 2^2 - 3 \\ 3^2 - 1 & 3^2 - 2 & 3^2 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1^2 - 1 & 2^2 - 1 \\ 1^2 - 2 & 2^2 - 2 \\ 1^2 - 3 & 2^2 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس AB را می‌سازیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & -14 \\ -4 & -14 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 14 \end{vmatrix} = 5 \times 14 - (-4)(-4) = 70 - 16 = 54$$

۴ - گزینه ۲

$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A + I)^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(A + I)^4 = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & -15 \\ 30 & -14 \end{bmatrix}$$

$$(A + I)^4 = mA + I \Rightarrow mA = \begin{bmatrix} 31 & -15 \\ 30 & -14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & -15 \\ 30 & -15 \end{bmatrix} \Rightarrow mA = 15A \Rightarrow m = 15$$

۵ - گزینه ۴

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 3a & -8 + 2a \\ b + 3c & -2b + 2c \end{bmatrix}$$

در یک ماتریس اسکالر، درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی برابر صفر هستند و درایه‌های واقع بر قطر با هم برابرند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} -8 + 2a = 0 \Rightarrow a = 4 \\ b + 3c = 0 \\ -2b + 2c = 4 + 3a \\ a = 4 \\ \rightarrow -2b + 2c = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + 3c = 0 \\ -2b + 2c = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -6 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$a + b + c = 4 - 6 + 2 = 0$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳

۲ - ۱

۳ - ۴

۴ - ۲

۵ - ۴