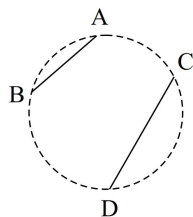


۱- در رسم عمود منصف پاره خط $MN = x$ دهانه‌ی پرگار را طبق اصول ترسیم به اندازه‌ی y باز کرده و دو کمان زده‌ایم که x و y کدام رابطه درست است؟

- ① $\frac{1}{2}x < y$ ② $y = \frac{1}{2}x$ ③ $y < \frac{1}{2}x$ ④ مقدار y دلخواه است.

۲- مطابق شکل، از دایره‌ای دو وتر غیر موازی AB و CD معلوم‌اند. کدام گزینه مرکز این دایره را مشخص می‌کند؟



① محل تلاقی دو پاره‌خط AD و BC

② وسط پاره‌خطی که وسط‌های AB و CD را به هم وصل می‌کند.

③ محل تلاقی عمود منصف‌های AB و CD

④ وسط AD

۳- حداکثر چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۳ واحد و از خط d هم به فاصله‌ی ۳ واحد باشد؟

- ① ۳ ② ۲ ③ ۱ ④ بی‌شمار

۴- در کدام یک از حالت‌های زیر، چهارضلعی مورد نظر، در صورتی که قابل رسم باشد منحصر به فرد نیست؟

- ① داشتن طول قطر مربع ② داشتن طول و عرض مستطیل ③ داشتن طول یک ضلع و یک قطر لوزی ④ داشتن طول دو قطر متوازی الاضلاع

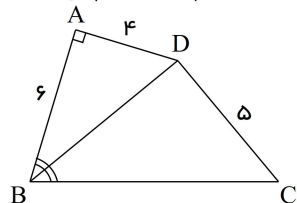
۵- پاره‌خط MN به طول $2x + 3$ مفروض است. اگر تنها یک نقطه به فاصله‌ی $x + 4$ از M و فاصله‌ی $2x - 1$ از N وجود داشته باشد، x کدام است؟

- ① صفر ② ۱ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$

۶- خط d و دو نقطه‌ی A و B در یک صفحه مفروض‌اند. در کدام حالت، حتماً نقطه‌ای روی خط d وجود دارد که از A و B به یک فاصله باشد؟

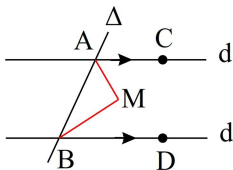
- ① خط d از نقطه‌ی A عبور کند. ② خط d امتداد پاره‌خط AB را قطع کند. ③ خط d پاره‌خط AB را در نقطه‌ای بین A و B قطع کند. ④ خط d موازی پاره‌خط AB باشد.

۷- در شکل مقابل، BD نیم‌ساز \hat{ABC} است. طول BC کدام است؟



- ① ۷ ② ۸ ③ ۹ ④ ۱۰

۸- دو خط موازی d و d' و خط مورب Δ مطابق شکل مفروضند. نیم‌سازهای دو زاویه‌ی BAC و ABD در نقطه‌ی M متقاطع‌اند. نسبت فاصله‌ی نقطه M از خط d به فاصله‌ی آن تا خط d' برابر با کدام است؟



- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{MA}{MB}$ ③ ۱ ④ بستگی به زوایای A و B دارد.

۹- دو خط متقاطع d و d' را در نظر بگیرید. دایره‌ای به شعاع دلخواه و مرکز محل برخورد این دو خط رسم شده است. چند نقطه روی این دایره وجود دارد که از این دو خط به یک فاصله هستند؟

۱۳۹۶- قلم چی - ن-م- آسان- ۱۳۲۱۶۹-#

④ حداکثر ۴ نقطه

③ دقیقاً ۴ نقطه

② حداکثر ۲ نقطه

① دقیقاً ۲ نقطه

۱۰- در شکل مقابل، کدام گزینه لزوماً صحیح است؟

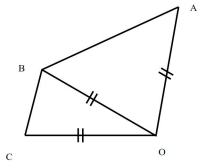
① O روی نیم‌ساز \widehat{ABC} واقع است.

③ O روی عمودمنصف AC واقع است.

② روی B روی نیم‌ساز \widehat{AOC} واقع است.

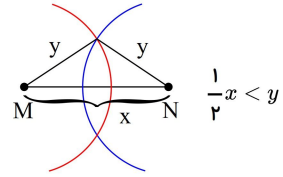
④ B روی عمودمنصف AC واقع است.

۱۲۸۴۳۰-# ن-م- متوسط- قلم چی - ۱۳۹۶

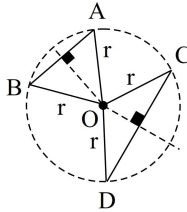


پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱: دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی بیش‌تر از نصف پاره خط باز می‌کنیم تا دو کمان همدیگر را قطع کنند.

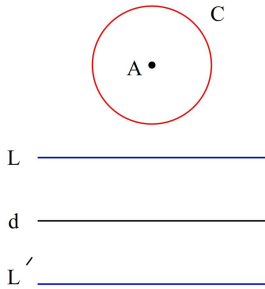


۲ - گزینه ۳: مرکز دایره از نقاط روی آن از جمله A, B, C, D به فاصله ثابت r (شعاع دایره) می‌باشد. بنابراین:

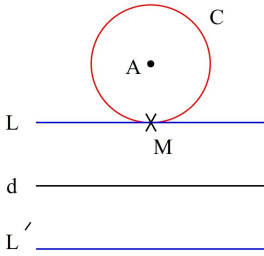


$OA = OB$ است AB عمودمنصف O روی AB است }
 $OD = OC$ است DC عمودمنصف O روی DC است }
 O محل تلاقی عمودمنصف‌های AB و CD است →

۳ - گزینه ۲: نقاطی در صفحه که از نقطه A به فاصله ۳ واحد هستند روی دایره به مرکز A با شعاع ۳ واحد قرار دارند. (دایره C). نقاطی در صفحه که از خط d به فاصله ۳ واحد هستند روی خط موازی به فاصله ۳ از آن در دو طرفش قرار دارند (خط‌های L و L'). نقاط برخورد دایره C با خط‌های L و L' جواب مسئله است. در ادامه روی تعداد جواب‌های مسئله بحث می‌کنیم:
 - اگر فاصله نقطه A از خط d بیشتر از ۶ واحد باشد مسئله جوابی ندارد.

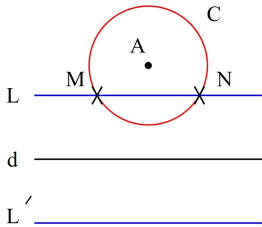


- اگر فاصله نقطه A از خط d برابر ۶ واحد باشد مسئله یک جواب دارد. (نقطه M)



- اگر فاصله نقطه A از خط d کمتر از ۶ واحد باشد مسئله دو جواب دارد. (نقاط M و N)

توجه: چون قطر دایره با فاصله L و L' برابر است حالت‌هایی که در آن‌ها ۳ یا ۴ جواب داریم امکان‌پذیر نیست.

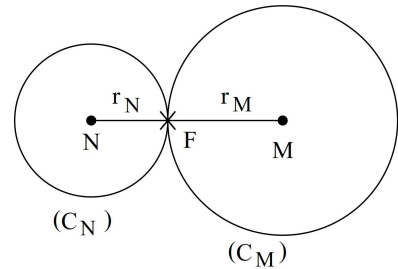


۴ - گزینه ۴: چون زاویه بین دو قطر متوازی‌الاضلاع معلوم نیست با تغییر این زاویه بی‌شمار متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد.

۵ - گزینه ۴: تمام نقاطی که از نقطه M به فاصله $x + 4$ هستند روی یک دایره به مرکز M با شعاع $x + 4$ قرار دارند (دایره C_M). تمام نقاطی که از نقطه N به فاصله $2x - 1$ هستند روی یک دایره به مرکز N با شعاع $2x - 1$ قرار دارند (دایره C_N). محل برخورد این دو دایره جواب مسئله است و با توجه به این‌که مسئله یک جواب دارد دو دایره مماس خارج یا مماس داخل‌اند.
 حالت اول: اگر دو دایره مماس خارج باشند، داریم:

$$MN = r_M + r_N$$

$$\rightarrow 2x + 3 = x + 4 + 2x - 1 \rightarrow x = 0$$



جواب $x = 0$ قابل قبول نیست زیرا در این صورت:

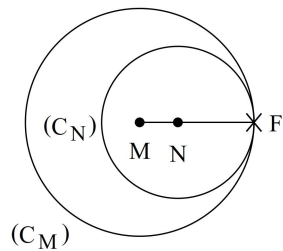
$$r_N = 2x - 1 = 2 \times 0 - 1 = -1$$

$$MN = r_M - r_N$$

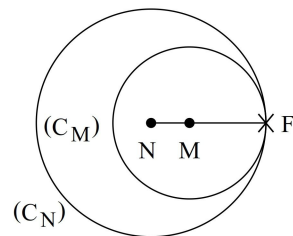
$$2x + 3 = (x + 4) - (2x - 1) \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

- زمانی که دو دایره مماس داخل باشند مسئله در دو حالت قابل بررسی است:

حالت دوم: اگر $r_M > r_N$ باشد، داریم:



حالت سوم: اگر $r_N > r_M$ باشد، داریم:



$$MN = r_N - r_M$$

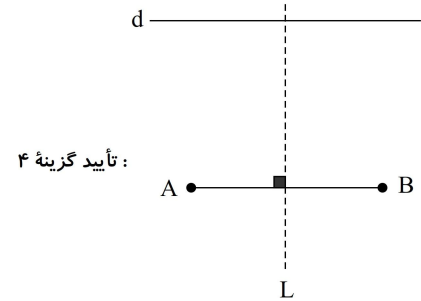
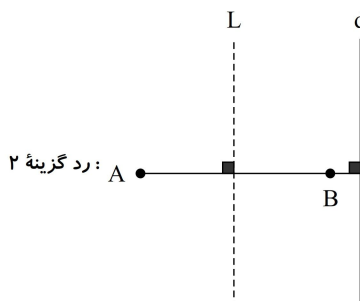
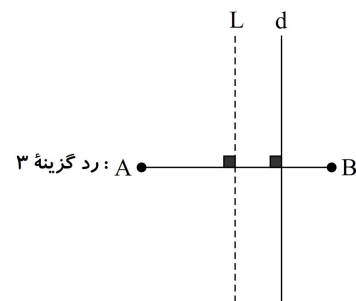
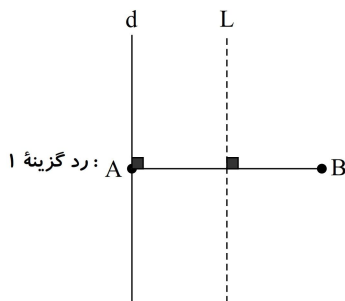
$$2x + 3 = (2x - 1) - (x + 4) \rightarrow x = -8$$

جواب $x = -8$ قابل قبول نیست، زیرا به ازای آن طول‌های MN ، r_M ، r_N منفی خواهد شد.

۶- گزینه ۴ تمام نقاطی که از A و B به یک فاصله باشند روی عمودمنصف AB قرار دارند. (خط L)

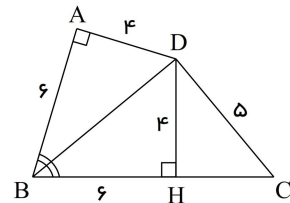
در صورتی که خط d در هر نقطه غیر از وسط پاره‌خط AB بر این پاره‌خط یا امتداد آن عمود باشد، موازی خط L خواهد بود و آن را قطع نمی‌کند ولی اگر خط d موازی پاره‌خط AB باشد خط L را در یک نقطه قطع می‌کند و همواره نقطه‌ای روی آن وجود دارد که از نقاط A و B به یک فاصله باشند.

به شکل‌های زیر برای رد گزینه‌های ۱، ۲، ۳ و تأیید گزینه ۴ دقت کنید:



۷ - گزینه ۳ از D بر BC عمود می‌کنیم. چون D روی نیم‌ساز زاویه B قرار دارد. پس:

$$\begin{cases} DH = AD = 4 \\ BH = AB = 6 \end{cases}$$

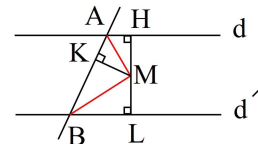


در مثلث قائم‌الزاویه DHC بنابر قضیه فیثاغورس داریم:

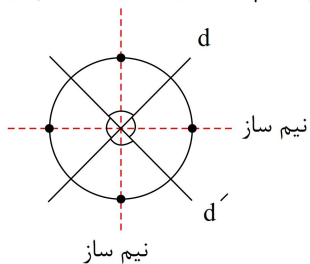
$$HC = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \Rightarrow BC = BH + HC = 6 + 3 = 9$$

۸ - گزینه ۳ می‌دانیم هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} \text{ روی نیم‌ساز } M \Rightarrow MH = MK \\ \hat{B} \text{ روی نیم‌ساز } M \Rightarrow ML = MK \end{array} \right\} \\ \Rightarrow MH = ML \Rightarrow \frac{MH}{ML} = 1$$



۹ - گزینه ۳ نقاطی که از دو خط متقاطع به یک فاصله باشند، روی نیم‌سازهای زوایای به وجود آمده قرار دارند. دو خط متقاطع دو نیم‌ساز دارند که این دو نیم‌ساز با دایره مذکور قطعاً در چهار نقطه، برخورد خواهند داشت.



۱۰ - گزینه ۳ چون $OA = OC$ است پس O از دو سر پاره خط AC به یک فاصله است. یعنی O روی عمودمنصف AC واقع است.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱

۲ - ۳

۳ - ۲

۴ - ۴

۵ - ۴

۶ - ۴

۷ - ۳

۸ - ۳

۹ - ۳

۱۰ - ۳