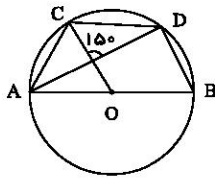


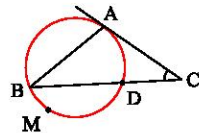
سوال ۲۰۲۲۰۰۰۰	وقت : دقیقه	تاریخ :
استاد علوی	تعداد سوالات: ۲۰	نام و نام خانوادگی :
		موضوع: هندسه یازدهم



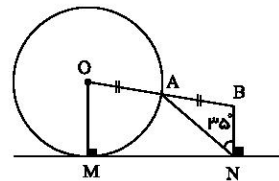
۱. در شکل زیر، O مرکز دایره و $AC = BD$ است. اندازه کمان CD چند درجه است؟

- (۱) 50°
- (۲) 75°
- (۳) 140°
- (۴) 150°

۲. در شکل مقابل مماس AC با وتر AB از دایره برابرند. اگر کمان \widehat{DMB} برابر 60° باشد، زاویه C چند درجه است؟



- (۱) 30°
- (۲) 40°
- (۳) 50°
- (۴) 60°

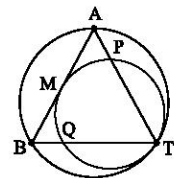


۳. در شکل مقابل $OA = OB$ و $\widehat{M} = \widehat{N} = 90^\circ$ است. زاویه \widehat{OAN} کدام است؟

- (۱) 70°
- (۲) 105°
- (۳) 120°
- (۴) 135°

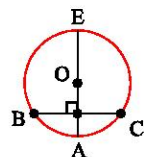
۴. دو دایره متقاطع در نقطه A مشترک‌اند. خط گذرا بر A دو دایره مفروض را در B و C قطع می‌کند. مماس‌ها بر هر دایره در B و C در نقطه M متقاطع‌اند. در مثلث MBC با چرخش خط قاطع، کدام جزء ثابت می‌ماند؟

- | | | | |
|----------|----------|-----------|---------------------------|
| (۱) MA | (۲) محیط | (۳) مساحت | (۴) زاویه \widehat{BMC} |
|----------|----------|-----------|---------------------------|



۵. در شکل مقابل اگر $\widehat{PM} = 60^\circ$ و $\widehat{QT} = 80^\circ$ باشد، زاویه B کدام است؟

- (۱) 60°
- (۲) 80°
- (۳) 70°
- (۴) 65°



۶. در شکل زیر وتر BC عمود منصف شعاع OA می‌باشد طول BE چند برابر طول AB می‌باشد؟

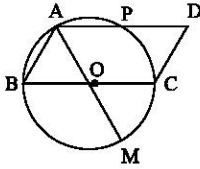
- (۱) ۲
- (۲) $\sqrt{2}$
- (۳) ۳
- (۴) $\sqrt{3}$

۷. بر دایره‌ای سه نقطه‌ی M و N و P را اختیار می‌کنیم و از A وسط کمان MN به B وسط کمان NP وصل می‌کنیم. این خط

وترهای MN و NP را به ترتیب در C و D قطع می‌کند. نوع مثلث CND کدام است؟

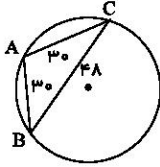
- | | | | |
|--------------------|--------------------|-------------------|------------------|
| (۱) متساوی‌الاضلاع | (۲) متساوی‌الساقین | (۳) مختلف‌الاضلاع | (۴) قائم‌الزاویه |
|--------------------|--------------------|-------------------|------------------|

۸. در شکل مقابل O مرکز دایره و $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. اگر $\widehat{BM} = 120^\circ$ باشد، زاویه \widehat{D} کدام است؟



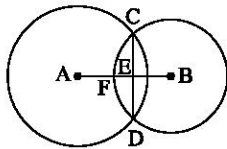
- ۱) 60°
- ۲) 50°
- ۳) 45°
- ۴) 70°

۹. در شکل مقابل شعاع دایره چقدر است؟



- ۱) ۴۵
- ۲) ۵۰
- ۳) ۲۵
- ۴) ۳۰

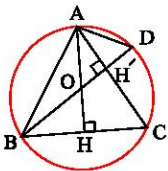
۱۰. مساحت ناحیه واقع بین دو دایره هم مرکز $\frac{9}{4}\pi$ است. اگر شعاع دایره بزرگ تر $\frac{5}{4}$ شعاع دایره کوچک باشد، مجموع طول شعاع دو دایره کدام است؟



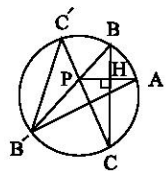
- ۱) ۳
 - ۲) ۴
 - ۳) ۴٫۵
 - ۴) ۵٫۵
۱۱. در شکل زیر $BE = ED$ است و A و B مراکز دایره‌ها هستند. زاویه \widehat{CFA} چند درجه است؟
- ۱) $92,5$
 - ۲) $102,5$
 - ۳) $112,5$
 - ۴) $122,5$

۱۲. وترهای AB و CD از دایره $C(O, R)$ در فواصل ۳ و $2\sqrt{6}$ سانتی‌متری از مرکز دایره واقع اند. اگر $3AB = 2CD$ ، شعاع دایره کدام است؟

- ۱) $3\sqrt{2}$
- ۲) $2\sqrt{3}$
- ۳) $3\sqrt{6}$
- ۴) ۶



۱۳. در شکل رو به رو، O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است. زاویه \widehat{AOD} برابر کدام است؟
- ۱) \widehat{OBC}
 - ۲) \widehat{CAD}
 - ۳) \widehat{OAC}
 - ۴) \widehat{ADO}

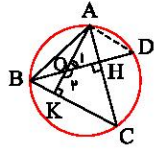


۱۴. در شکل مقابل BC عمود منصف AP است. اگر $\widehat{PCH} = \alpha$ باشد، زاویه $\widehat{BB'A}$ کدام است؟

- ۱) α
- ۲) $\frac{\alpha}{2}$
- ۳) $\frac{2\alpha}{3}$
- ۴) $\frac{\alpha}{3}$

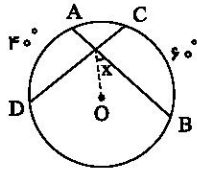
۱۵. در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$) نقطه O در امتداد AC مرکز دایره‌ای است که در نقطه B بر ضلع AB مماس است و امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است. مثلث OCD چگونه است؟

- ۱) متساوی‌الساقین
- ۲) قائم‌الزاویه
- ۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین
- ۴) غیر مشخص



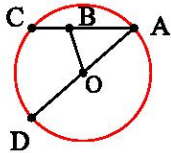
۱۶. در شکل روبرو نقطه O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است. زاویه \widehat{AOD} برابر کدام است؟

- (۱) \widehat{OBC}
 (۲) \widehat{CAD}
 (۳) \widehat{OAC}
 (۴) \widehat{ADO}



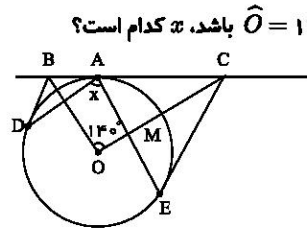
۱۷. در شکل مقابل دو وتر AB و CD مساویند. اگر O مرکز دایره باشد، زاویه‌ی x کدام است؟

- (۱) 55°
 (۲) 65°
 (۳) 40°
 (۴) 35°



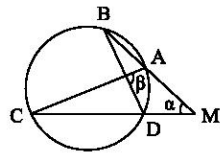
۱۸. در شکل مقابل $OB = 6$ و زوایای \widehat{ABO} ، \widehat{COD} برابر 60° هستند. اندازه BC کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{3}$
 (۲) ۶
 (۳) $6\sqrt{3}$
 (۴) ۳



۱۹. در شکل مقابل BC و CE بر دایره مماسند و نقطه‌ی O مرکز دایره است. اگر $\widehat{O} = 140^\circ$ باشد، x کدام است؟

- (۱) 100°
 (۲) 140°
 (۳) 40°
 (۴) 120°



۲۰. در شکل مقابل اگر $\widehat{BAC} = 3\widehat{ABD}$ ، آنگاه زاویه‌ی β چند برابر زاویه‌ی α است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$
 (۲) ۲
 (۳) $\frac{4}{3}$
 (۴) ۳

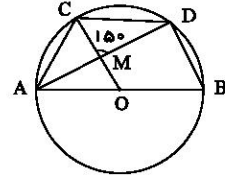
سوال ۲۰۲۴۰ استاد علوی	وقت : دقیقه	تاریخ :
	تعداد سوالات: ۲۰	نام و نام خانوادگی :
		موضوع ۱ هندسه ۲، هندسه یازدهم

۱. گزینه ۳

$$AC = DB \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{DB} = x, \widehat{DAB} \text{ محاطی} = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{x}{2}, \widehat{COA} \text{ مرکزی} = \widehat{AC} = x$$

$$\Delta AMO : \widehat{M} = 150^\circ \Rightarrow x + \frac{x}{2} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$$

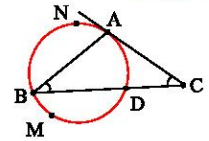
$$\Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 180^\circ - 2 \times 20^\circ = 140^\circ$$



۲. گزینه ۳

$$AB = AC \Rightarrow \widehat{AD} = 2\widehat{C} \Rightarrow \widehat{ANB} = 300^\circ - 2\widehat{C}$$

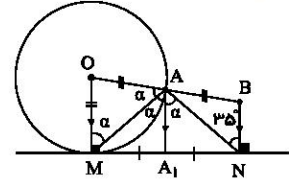
$$\Rightarrow \widehat{C} = \frac{\widehat{ANB} - \widehat{AD}}{2} = \frac{300^\circ - 4\widehat{C}}{2} = 150^\circ - 2\widehat{C} \Rightarrow 3\widehat{C} = 150^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 50^\circ$$



۳. گزینه ۲ از A به M وصل می کنیم. داریم:

$$\Delta OAM : OA = OM \Rightarrow \widehat{OMA} = \widehat{OAM} = \alpha$$

$$AA' \parallel OM \Rightarrow \widehat{MAA'} = \alpha$$



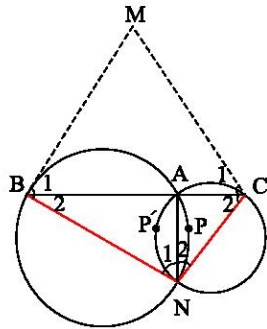
$$\begin{cases} BN \parallel OM \Rightarrow \widehat{OBNM} \text{ ذوزنقه} \Rightarrow \widehat{O} + B = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{O} \Rightarrow \widehat{B} = 2\alpha \\ \Delta AOM : \widehat{O} = 180^\circ - 2\alpha \end{cases}$$

$$\Delta MAN : A'M = A'N, \widehat{A'} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MAA'} = \widehat{A'AN} = \alpha \Rightarrow \widehat{OAN} = 3\alpha$$

$$AA' \parallel BN \Rightarrow \alpha = 35^\circ \Rightarrow \widehat{OAN} = 3 \times 35^\circ = 105^\circ$$

۴. گزینه ۴

از نقاط B و C به نقطه‌ی تلاقی دوم دو دایره یعنی N وصل می کنیم.



$$\widehat{N}_1 + \widehat{N}_2 = \frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{AC}}{2} = \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 180^\circ - \widehat{M} \quad (1)$$

از طرفی در مثلث BNC داریم:

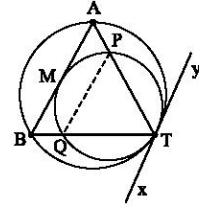
صفحه ۴

$$\widehat{N}_1 + \widehat{N}_2 = 180^\circ - (\widehat{B}_2 + \widehat{C}_2) = 180^\circ - \left(\frac{\widehat{APN}}{2} + \frac{\widehat{AP'N}}{2} \right) = 180^\circ - \text{مقدار ثابت}$$

$$\text{مقدار ثابت } \Rightarrow \widehat{M} = 180^\circ - \widehat{M} = 180^\circ - \text{مقدار ثابت} \Rightarrow \widehat{M} = \text{مقدار ثابت}$$

۵. گزینه ۲ مطابق شکل از T مماس رسم می‌کنیم. داریم:

$$\begin{cases} \widehat{BAT} = \widehat{BT}x = \frac{\widehat{BT}}{2} \\ \widehat{QPT} = \frac{\widehat{QT}}{2} = \widehat{BT}x \end{cases} \Rightarrow \widehat{QPT} = \widehat{BAT} \Rightarrow PQ \parallel AB$$



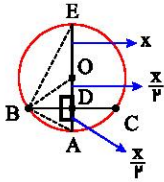
$$\Rightarrow MP = MQ$$

$$PM = 60^\circ \Rightarrow MQ = 60^\circ \Rightarrow \widehat{PT} = 360^\circ - (60^\circ + 60^\circ + 180^\circ) \Rightarrow \widehat{PT} = 160^\circ$$

$$\widehat{B} = \frac{\widehat{TPM} - \widehat{MQ}}{2} = \frac{160 + 60 - 60}{2} = 80^\circ$$

۶. گزینه ۴

شعاع را x فرض می‌کنیم، پس:



$$OD = AD = \frac{x}{2} \Rightarrow ED = \frac{3}{2}x$$

حال:

$$\begin{cases} \text{مشترک } BD \\ OD = AD \Rightarrow \triangle OBD \cong \triangle ABD \Rightarrow AB = OB = x \\ \widehat{D} = 90^\circ \end{cases}$$

و در مثلث $\triangle OBD$ داریم:

$$BD^2 + OD^2 = OB^2 \Rightarrow BD = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

حال می‌رویم سراغ مثلث $\triangle EBD$ و داریم:

$$BD^2 + ED^2 = EB^2 \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right)^2 + \left(\frac{3}{2}x \right)^2 = EB^2 \Rightarrow EB = \sqrt{3}x$$

و اما جمع بندی

$$? = \frac{BE}{AB} = \frac{\sqrt{3}x}{x} = \sqrt{3}$$

راه دوم:

طبق روابط مثلث قائم الزاویه داریم:

$$\triangle EBA \text{ محاطی } = \frac{\widehat{AE}}{2} = 90^\circ, D = 90^\circ$$

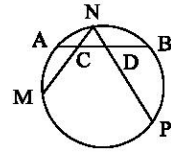
صفحه ۵

$$BE^2 = DE \times AE = \frac{3}{2}x \times 2x \Rightarrow BE = \sqrt{3x}$$

$$AB^2 = AD \times AE = \frac{x}{2} \times 2x = x^2 \Rightarrow AB = x \Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{\sqrt{3x}}{x} = \sqrt{3}$$

۷. گزینه ۲ برای اینکه ثابت کنیم $NC = ND$ است کافی است ثابت کنیم مثلث NCD متساوی الساقین است برای این منظور گوئیم:

$$D_1 = \frac{\widehat{AN} + \widehat{BP}}{2} \quad (2) \quad , \quad C_1 = \frac{\widehat{NB} + \widehat{AM}}{2} \quad (1)$$



چون $\widehat{NB} = \widehat{BP}$ و $\widehat{AN} = \widehat{AM}$ است پس در روابط اول قرار می‌دهیم می‌شود: $C_1 = \frac{\widehat{BP} + \widehat{AN}}{2}$ چون در یک طرف با رابطه ۲ برابر شدند طرف دیگرشان نیز با هم است. پس $D_1 = C_1$ یعنی مثلث NCD متساوی الساقین است. پس: $NC = ND$

۸. گزینه ۱

$$ABCD \text{ متوازی الاضلاع} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{D} \text{ و محاطی } \widehat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \widehat{M} \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{D} = \widehat{B}$$

$$AB \parallel MC \Rightarrow \widehat{BM} = \widehat{APC} = \widehat{AP} + \widehat{CP} = 120^\circ, \quad AP \parallel BC \Rightarrow \widehat{CP} = \widehat{AB}$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ = \widehat{CP} \Rightarrow \widehat{AP} = 180^\circ - 2 \times 60^\circ = 60^\circ$$

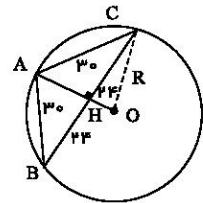
$$\widehat{D} = \widehat{B} = \frac{\widehat{APC}}{2} = \frac{60^\circ + 60^\circ}{2} = 60^\circ$$

$$\triangle ABH : H = 90^\circ \Rightarrow AH^2 = 30^2 - 24^2 \Rightarrow AH = 18$$

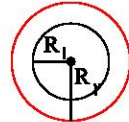
$$OH = R - 18$$

$$\triangle OHC : R^2 = 24^2 + (R - 18)^2 \Rightarrow R = 25$$

۹. گزینه ۳



۱۰. گزینه ۳ داریم:



$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{5}{4}$$

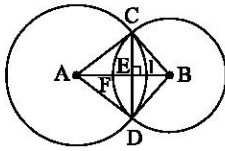
$$\pi R_2^2 - \pi R_1^2 = \frac{9}{4}\pi \Rightarrow R_2^2 - R_1^2 = \frac{9}{4}$$

$$\left(\frac{5}{4}R_1\right)^2 - R_1^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{9}{16}R_1^2 = \frac{9}{4}$$

$$R_1 = 2, \quad R_2 = \frac{5}{2}$$

$$? = R_2 + R_1 = 4,5$$

گزینه ۳

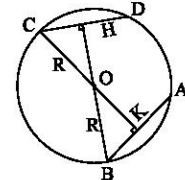


۱۱. مراکز ۲ دایره هستند. بنابراین AB عمود منصف CD است. در نتیجه $ED = CE$ و چون طبق فرض مسئله $EB = ED$ می توان گفت $CE = EB$ یعنی مثلث CEB قائم الزاویه متساوی الساقین است پس $\widehat{B}_1 = 45^\circ$ مثلث FBC متساوی الساقین است با زاویه رأس 45° (زیرا $BF = BC$ همان شعاع دایره است) پس:

$$\widehat{CFB} = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67,5^\circ \rightarrow \widehat{CFA} = 180^\circ - 67,5^\circ \rightarrow \widehat{CFA} = 112,5^\circ$$

۱۲. گزینه ۴ از آنجا که $AB = 3$ و $CD = 2\sqrt{6}$ است و $AB < CD$. پس مطابق شکل فاصله CD از مرکز بیشتر از AB است. داریم:

$$OH = 3, Ok = 2\sqrt{6}, 3AB = 2CD \Rightarrow AB = \frac{2}{3}CD \quad (1)$$



در مثلث های OCH و OBK داریم:

$$\begin{cases} \Delta OCH : R^2 = OH^2 + CH^2 = 9 + \frac{CD^2}{4} \\ \Delta OBK : R^2 = OK^2 + BK^2 = 24 + \frac{AB^2}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{CD^2}{4} + 9 = \frac{AB^2}{4} + 24, (1) \Rightarrow \frac{CD^2}{4} + 9 = \frac{1}{4} \times \frac{4}{9} CD^2 + 24$$

$$\frac{CD^2}{4} - \frac{1}{9} CD^2 = 15 \Rightarrow \frac{5CD^2}{36} = 15 \Rightarrow CD^2 = 3 \times 36 \Rightarrow CD = 6\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow R^2 = 9 + \frac{1}{4} \times (6\sqrt{3})^2 = 9 + \frac{1}{4} \times 36 \times 3 = 36 \Rightarrow R = 6$$

۱۳. گزینه ۴ در چهار ضلعی $HOH'C$ دو زاویه مقابل مکمل یکدیگر هستند، پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{HOH'} + \widehat{C} &= 180^\circ \\ \widehat{AOD} = \widehat{C} \\ \widehat{AOD} + \widehat{HOH'} &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{ADO} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{ADO}$$

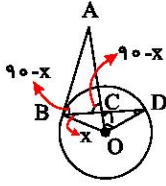
۱۴. گزینه ۱ از C به A وصل می کنیم. دو مثلث PCH و ACH به حالت دو ضلع و زاویه ی بین (قائمه) هم نهشت هستند. داریم:

$$\begin{cases} \widehat{HCA} = \widehat{HCP}, \widehat{HCP} = \frac{\widehat{BC'}}{2} \Rightarrow \widehat{BC'} = 2\alpha \\ \widehat{HCP} = \alpha \end{cases}$$

$$\widehat{HCA} = \widehat{HCP} = \alpha \Rightarrow \widehat{AB} = 2\alpha, \widehat{BB'A} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

۱۵. گزینه ۲ شعاع OB بر ضلع AB عمود است از طرفی مثلث OBD متساوی الساقین می باشد ($OB = OD$) پس اگر

$$\widehat{ODB} = \widehat{OBD} = x \text{ آنگاه } \widehat{CBA} = \widehat{BCA} = 90^\circ - x \text{ در نتیجه } \widehat{C}_1 = 90^\circ - x \text{ بنابراین مثلث } OCD \text{ قائم الزاویه است و } \widehat{O}_1 = 90^\circ$$



۱۶. گزینه ۴ زاویه \widehat{AOD} برابر زاویه \widehat{C} است زیرا:

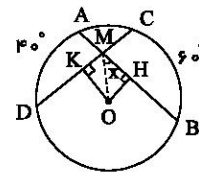
$$\begin{cases} \widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 180^\circ \\ \widehat{OHCK} : \widehat{H} + \widehat{K} = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{O_1} = 180^\circ - \widehat{O_2} \\ \widehat{O_2} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{O_2} \end{cases} \Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{C}$$

و نیز دو زاویه محاطی \widehat{C} و \widehat{ADB} برابرند زیرا مقابل به یک کمان از دایره هستند. در نتیجه $\widehat{AOD} = \widehat{ADO}$

۱۷. گزینه ۲ دو وتر AB و CD مساویند، پس فاصله‌ی مرکز دایره (O) از AB و CD برابر است، پس OM نیمساز زاویه‌ی

\widehat{DMB} می‌باشد:

$$\begin{aligned} OH = OK, H = K = 90^\circ &\Rightarrow \triangle OMH \cong \triangle OMK \Rightarrow \widehat{DMB} = 2\widehat{H} \\ \widehat{AD} + \widehat{BC} = 40^\circ + 60^\circ = 100^\circ &\Rightarrow \widehat{AC} + \widehat{BD} = 360^\circ - 100^\circ = 260^\circ \\ \widehat{DMB} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} = \frac{260^\circ}{2} = 130^\circ &\Rightarrow x = \frac{\widehat{DMB}}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ \end{aligned}$$

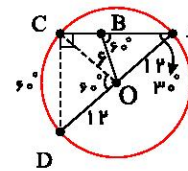


۱۸. گزینه ۳ \widehat{COD} برابر 60° است پس \widehat{CD} نیز 60° است از طرفی \widehat{CAD} زاویه محاطی و برابر نصف CD است یعنی

$$\widehat{CAD} = 30^\circ$$

در مثلث $\triangle ABO$:

$$\begin{aligned} \widehat{A} = 30^\circ, \widehat{B} = 60^\circ &\Rightarrow \widehat{O} = 90^\circ \\ \sin \widehat{A} = \frac{OB}{AO} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6}{AO} &\Rightarrow AO = 12, AB = 6\sqrt{3} \end{aligned}$$



در مثلث $\triangle CAD$:

$$\begin{aligned} \widehat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} = 90^\circ \\ \cos \widehat{A} = \frac{AC}{AD} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{24} &\Rightarrow AC = 12\sqrt{3} \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$BC = AC - AB = 12\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

۱۹. گزینه ۲ مماسهای رسم شده از نقطه بر دایره برابرند. داریم:

$$\begin{cases} CA = CE \Rightarrow OC \perp AE \Rightarrow M = 90^\circ \\ AB = BD \Rightarrow OB \perp AD \Rightarrow N = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle ANOM : 90^\circ + 90^\circ + 40^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow x = 140^\circ$$

$$\widehat{BAC} = 3\widehat{ABD} \Rightarrow \frac{\widehat{BC}}{2} = 3 \times \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 3\widehat{AD}$$

α زاویه ی بین امتداد دو وتر AB و CD و β زاویه ی بین دو وتر BD و AC است. پس:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\widehat{BC} - \widehat{AD}}{2} = \frac{3\widehat{AD} - \widehat{AD}}{2} = \widehat{AD} \\ \beta &= \frac{\widehat{BC} + \widehat{AD}}{2} = \frac{3\widehat{AD} + \widehat{AD}}{2} = 2\widehat{AD} \end{aligned} \right\} \rightarrow \beta = 2\alpha$$

پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۲۰۴۲۲۰

۲ -۵	۴ -۴	۲ -۳	۳ -۲	۳ -۱
۳-۱۰	۳ -۹	۱ -۸	۲ -۷	۴ -۶
۲-۱۵	۱-۱۴	۴-۱۳	۴-۱۲	۳-۱۱
۲-۲۰	۲-۱۹	۳-۱۸	۲-۱۷	۴-۱۶